تم بيع أكثر من ٣٠ مليون نسخة من ملخصات شوم!

الهندسة

ملخصات شوم إيزى

- يغطى جميع أساسيات المنهج
- يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب على التفوق والنجاح



الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.
مصر

الهندسة

المؤلف

د. بارنيت ريتش

مراجعة

د. فيليب أ. شميدت

محرر الموجز

د. چورچ چ. هادمينوس

ترجمة

مهندسة / مرام صلاح الدين طه

مراجعة

أ.د./ أحمد عبد السميع الحملاوى
أستاذ الفيزياء الهندسية ـ جامعة المنوفية
عميد المعهد العالى لتكنولوچيا البصريات

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.
مصر

حقوق النشر

Geometry

by

Barnett Rich

International House for Cultural Investments S.A.E.

8, Ibrahim El-Orabi St., El-Nozha El-Gedida

Heliopolis West, Cairo, Egypt

E-mail: ihci@link.net

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى ـ النزهة الجديدة ـ مصر الجديدة ـ القاهرة ـ ج . م . ع .

ص . ب : 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة ـ تليفون : 6222105/6221944 فاكس : 6221944 (00202)

بريد إلكترونى : ihci@link.net

رقم الإيداع : 2003/14818

I.S.B.N: 977-282-160-5

كتب أخرى فى
سلسلة ملخصات شوم إيـزى

ملخص شوم إيـزى : الفيزياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الفيزياء التطبيقية
ملخص شوم إيـزى : الكهرومغناطيسيات
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العامة
ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العضوية
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا
ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا الجزيئية وبيولوچيا الخلية
ملخص شوم إيـزى : الوراثة
ملخص شوم إيـزى : الجبر العام
ملخص شوم إيـزى : الجبر الأساسى
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء
ملخص شوم إيـزى : الاحتمالات والإحصاء
ملخص شوم إيـزى : حساب التفاضل والتكامل
ملخص شوم إيـزى : مبادئ التفاضل والتكامل
ملخص شوم إيـزى : حساب المثلثات
ملخص شوم إيـزى : الرياضيات المنفصلة
ملخص شوم إيـزى : مرجع رياضى لأهم القوانين والجداول
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة C++
ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة JAVA
ملخص شوم إيـزى : أساسيات الكهرباء
ملخص شوم إيـزى : مبادئ الاقتصاد
ملخص شوم إيـزى : الإحصاء التجارى
ملخص شوم إيـزى : مبادئ المحاسبة
ملخص شوم إيـزى : مقدمة فى علم النفس

بارنيت ريتش حصل على دكتوراه الفلسفة من جامعة كولومبيا و .J.D من جامعة نيويورك. كان مؤسس المدرسة الثانوية للموسيقى والفنون بمدينة نيويورك وكان رئيس قسم الرياضيات فى مدرسة بروكلين التكنيكية الثانوية. كما أنه دَرَّس بجامعة سيتى بنيويورك وكولومبيا.

فيليب أ. شميدت حصل على بكالوريوس من كلية بروكلين وكلاً من ماجستير ودكتوراه الفلسفة من جامعة سيراكيوس. هو استشارى للخدمات الأكاديمية فى كلية بريا بكنتاكى وكان عميد مدرسة التعليم فى سنى بنيوبالتز.

چورچ چ. هادمينوس درّس فى جامعة دالاس وأجرى أبحاثًا فى المركز الطبى لجامعة ماساشوستس وجامعة كاليفورنيا بلوس أنجلوس. حصل على بكالوريوس من جامعة أنجلو ستات وكلاً من ماجستير ودكتوراه فى الفلسفة من جامعة تكساس بدالاس. هو مؤلف لعديد من الكتب فى سلسلة شوم.

المحتويات

الفصل الأول
الخطوط، الزوايا والمثلثات
Lines, Angles, and Triangles

فى هذا الفصل:

- ✓ **المصطلحات الهندسية غير المعرفة:**
  النقطة، الخط، والمستوى
- ✓ **القطع المستقيمة**
- ✓ **الدوائر**
- ✓ **الزوايا**
- ✓ **المثلثات**
- ✓ **أزواج الزوايا**

المصطلحات الهندسية غير المعرفة:
النقطة، الخط، والمستوى

Undefined Terms of Geometry:
Point, Line, and Plane

Point **النقطة**

النقطة، تمثل بدائرة مغلقة، لها موضع فقط. ليس لها طول، عرض، أو سُمك.

الخط Line

الخط، يستبدل عليه بالرمز $\overleftrightarrow{AB}$ له طول ولكـن ليـس لـه عـرض أو سُمك ويمكن أن يكون الخط مستقيمًا أو منحنيًا أو تركيب ذلك معًا.

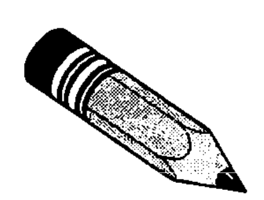
وينتج الخط المستقيم Straight Line عن طريق تحريك نقطة فى نفس الاتجاه دائمًا. الخـط المسـتقيم يمكـن امتـداده فـى أى الاتجـاهين لا نهائيًا. الشعاع، ويكتب $\overrightarrow{AB}$ هو الجزء من الخط المستقيم الذى يبـدأ عند نقطة معلومة ويمتد إلى حد معين فى اتجاه واحد.

الخط المنحنى Curved Line ينتج عن طريق تحريك نقطـة باسـتمرار فى اتجاهات متغيرة.

المستوى Plane

المسـتوى لـه طـول وعـرض وليـس لـه سُـمك.

المستوى هو سطح بحيث يقع الخط المستقيم الـذى يصل بين نقطتين من نقاطه بداخله كليًا.



القِطعة المستقيمة Line Segments

القِطعْة المستقيمة، يرمز لها بالرمز $\overline{AB}$، هى جزء من خط مستقيم بين أى نقطتين وتشتمل النقطتين أيضًا.

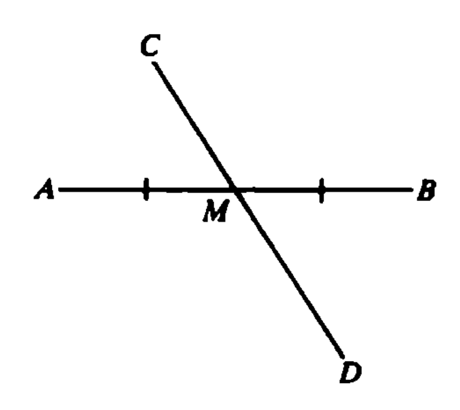
إذا قسمت القطعة المستقيمة إلى أجزاء:

1. طول القطعة المستقيمة ككل تساوى مجموع أطوال أجزائها ويرمز لطول $\overline{AB}$ بالرمز AB.
2. الطول الكلى للقطعة المستقيمة أكبر من طول أى جزء فيها.
3. المستقيمان اللذان لهما نفس الطول يطلق عليهما متطابقان. وبالتالى، إذا كان $AB = CD$، إذن $\overline{AB}$ يطابق $\overline{CD}$ وتكتب $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

إذا قُسمت القطعة المستقيمة إلى جزئين متساويين:

1. نقطة التقسيم هى نقطة تنصيف القطعة المستقيمة.
2. الخط الذى يمر بنقطة التنصيف يقال إنه ينصف القطعة المستقيمة.

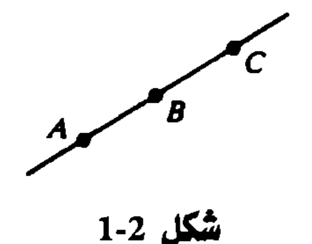
لأن $AM = MB$ فى الشكل 1-1، فإن M هى نقطة تنصيف $\overline{AB}$، و $\overline{CD}$ ينصف $\overline{AB}$. ويمكن تحديد الخطوط المتساوية فى الطول عن طريق وضع علامات فوق الخط لها نفس الشكل والعدد. ويلاحظ أن $\overline{AM}$ و $\overline{MB}$ عليهما علامة واحدة.



شكل 1-1

3. إذا وقع ثلاث نقاط A، B، C على خط مستقيم، إذن فإنهم نقاط متسامتة (واقعة على نفس الخط).

إذا كان A، B، C نقاط متسامتة و $AB + BC = AC$، إذن B تقع بين النقطة A والنقطة C [انظر الشكل 1-2].



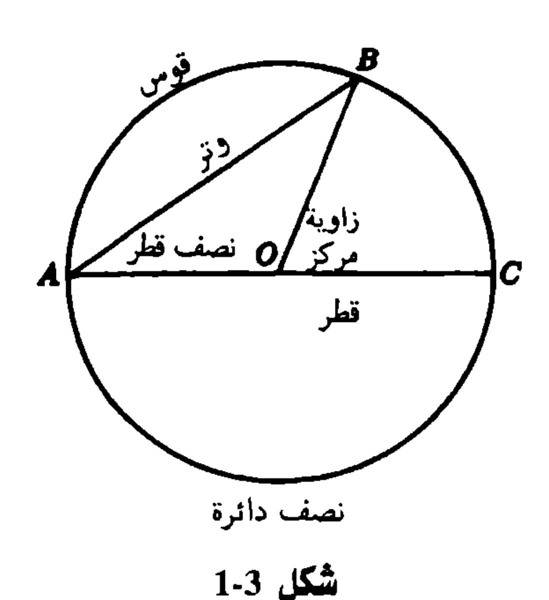
شكل 1-2

الدوائر Circles

هى مجموعة نقاط فى المستوى تبعد بُعدًا ثابتًا عن مركز الدائرة.

محيط الدائرة Circumference هو المسافة حول الدائرة ويحتوى على (360°).

نصف القطر Radius هو قطعة مستقيمة تصل مركز الدائرة بأى نقطة على الدائرة (انظر شكل 3-1).



شكل 3-1

من تعريف الدائرة يمكن استنتاج أن أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.

الوتر Chord هو قطعة مستقيمة تصل بين أى نقطتين على الدائرة.

القطر Diameter هو وتر يمر بمركز الدائرة وهو أطول وتر فى الدائرة ويساوى ضعف طول نصف القطر.

القوس Arc هو جزء متصل من الدائرة. القوس الذى قياسه 1° يمثل 1/360 من محيط الدائرة.

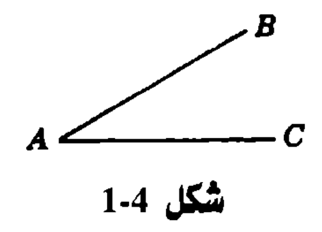
نصف الدائرة Semicircle عبارة عن قوس قياسه نصف محيط الدائرة وبالتالى يحتوى على 180°. القطر يقسم الدائرة إلى نصفى دائرة.

زاوية المركز Central Angle هى زاوية تتكون من نصفى قطر.

الدوائر المتطابقة Congruent Circles هى دوائر لها أنصاف أقطار متطابقة.

الزوايا Angles

الزاويـة هـى الشكـل المكـون مـن شعـاعين لـهما نقطـة نهايـة مشتركـة. الشعاعان هما ضلعا الزاوية، بينما نقطة النهاية هى رأس الزاوية Vertex. ويرمز للزاويـة بالرمـز $\angle$ أو $\measuredangle$. إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هما ضلعى الزاويـة الموضحة فى الشكل 1-4 و A هى رأسها.

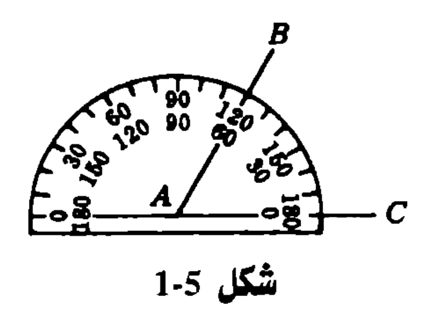


شكل 1-4

قياس مقدار الزاوية Measuring the Size of an Angle

مقدار الزاوية يعتمد على مدى دوران أحد أضلاع الزاويـة حـول رأس الزاوية حتى يتلاقى مع الضلع الآخر للزاوية. ونختار الدرجات لتكـون وحدة قياس الزوايا. قياس الزاوية هو عدد الدرجـات التـى تحتويـها. سنكتب $m\angle A = 60°$ للدلالة على أن قياس الزاوية A يساوى $60°$.

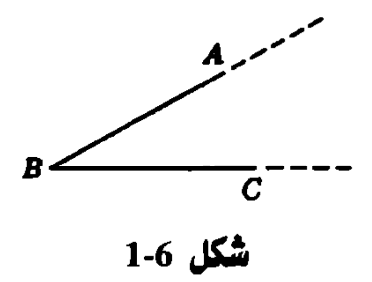
المنقلة فـى شكل 1-5 توضـح أن قيـاس $\angle A$ يساوى $60°$. إذا تـم دوران $\overrightarrow{AC}$ حـول رأس الزاويـة A حتى يتلاقى مـع $\overrightarrow{AB}$ سيكون مقـدار الدوران $60°$.



شكل 1-5

عند استخدام المنقلة، تأكد أن رأس الزاوية عند المركز وأن أحد الأضلاع على القطر $0° - 180°$.

مقدار الزاوية لا يعتمد على طول أضلاع الزاوية. مقدار $\angle B$ فى الشكل 6-1 لا يتغير إذا تم تقصير أو إطالة ضلعاها $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$.

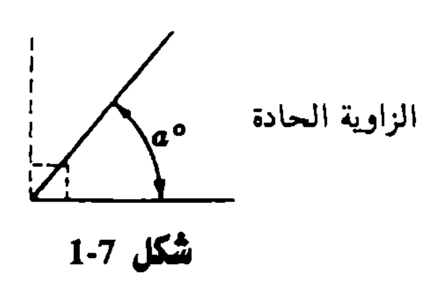


شكل 6-1

لقياس الزوايا بدقة أكثر، فإننا نقوم بقسمة الدرجة المئوية الواحدة ($1°$) إلى 60 جزءاً متساويًا، يطلق عليه دقائق Minutes. إذن:
الدرجة المئوية الواحدة ($1°$) = 60 دقيقة ($60'$) والدقيقة الواحدة ($1'$) = 60 ثانية ($60''$).

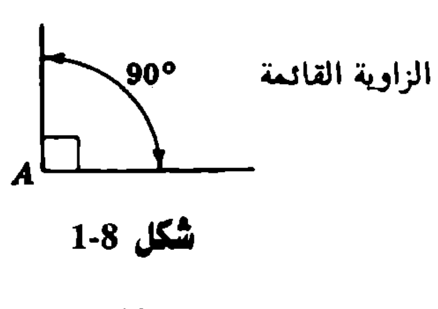
أنواع الزوايا Kinds of Angles

1. الزاوية الحادة Acute Angle: الزاوية الحادة هى زاوية قياسها أقل من $90°$ (انظر الشكل 7-1).



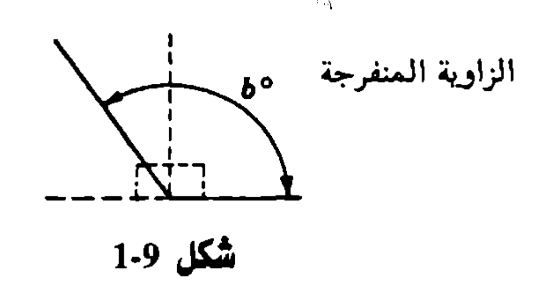
شكل 7-1

2. الزاوية القائمة Right Angle: الزاوية القائمة هى زاوية قياسها $90°$ (انظر الشكل 8-1).



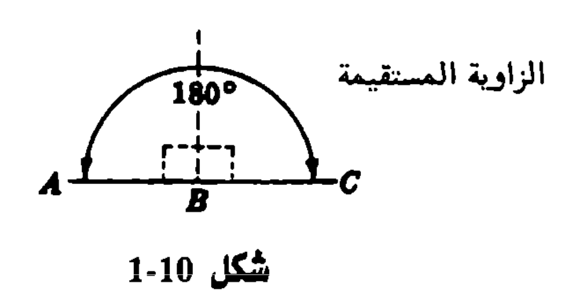
شكل 8-1

3. الزاوية المنفرجة Obtuse Angle: الزاوية المنفرجة هى زاوية قياسها أكبر من 90° وأقل من 180° (انظر الشكل 1-9).



شكل 1-9

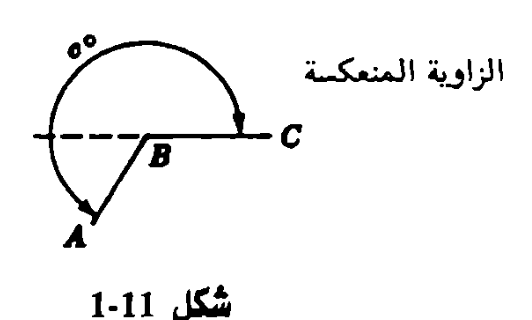
4. الزاوية المستقيمة Straight Angle: الزاوية المستقيمة هى زاوية قياسها 180° (انظر الشكل 1-10).



شكل 1-10

لاحظ أن ضلعى الزاوية المستقيمة يقعان على نفس الخط المستقيم. ولكن يجب عدم الخلط بين الزاوية المستقيمة والخط المستقيم.

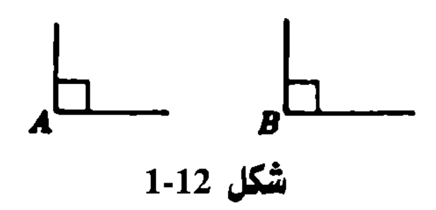
5. الزاوية المنعكسة Reflex Angle: الزاوية المنعكسة هى زاوية قياسها أكبر من 180° وأقل من 360° (انظر الشكل 1-11).



شكل 1-11

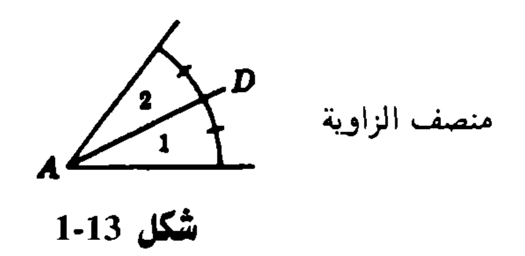
حقائق إضافية عن الزوايا Additional Angle Facts

1. الزوايا المتطابقة Congruent Angles: هى زوايا لها نفس عدد الدرجات. بمعنى، $m\angle A = m\angle B$، إذن $\angle A \cong \angle B$ وبالتالى، فى الشكل 1-12، $\angle B\,(\text{rt.}) \cong \angle A\,(\text{rt.})$ حيث أن كلاهما قياسه $90°$.



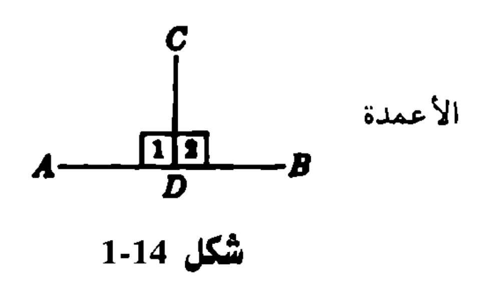
شكل 1-12

2. الخط المنصف للزاوية يقسمها إلى جزئين متطابقين. وبالتالى، فى الشكل 1-13. إذا كان $\overline{AD}$ ينصف $\angle A$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.



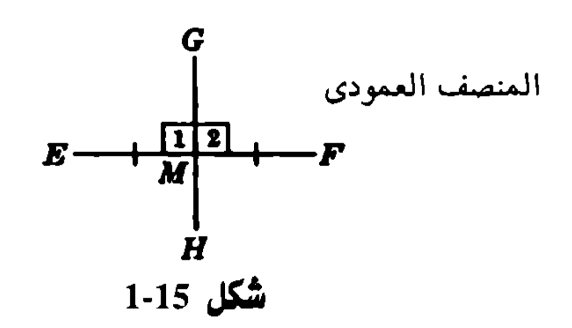
شكل 1-13

3. الأعمدة Perpendiculars هى خطوط، أشعة، أو قطع تتقابل عند زوايا قائمة. ورمز العمود هو $\perp$. وبالتالى، فى الشكل 1-14 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$، لذلك تتكون الزاويتان القائمتان 1 و 2.



شكل 1-14

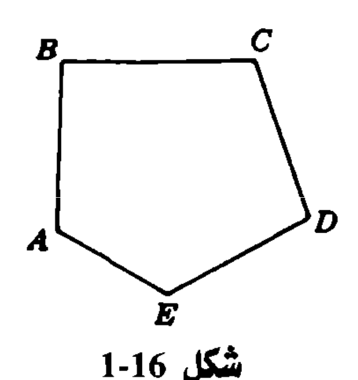
4. المنصف العمودى Perpendicular Bisector لقطع معلوم هو عمودى على القطع وينصفه. وبالتالى، فى الشكل 1-15، $\overline{GH}$ هو $\perp$ منصف للقطعة $\overline{EF}$؛ إذن $\angle 1$ و$\angle 2$ زاويتان قائمتان و M هى نقطة تنصيف $\overline{EF}$.



شكل 1-15

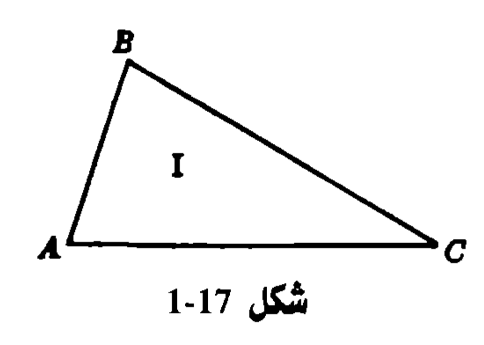
المثلثات Triangles

المضلع Polygon هو شكل مستوٍ مغلق محدد بقطع مستقيمة كأضلاع. إذن، الشكل 1-16 هو مضلع مكون من خمسة أضلاع ويطلق عليه الشكل الخماسى Pentagon (المخمس). ويسمى المخمس *ABCDE* باستخدام حروفه بالترتيب.



شكل 1-16

المثلث Triangle هو مضلع مكون من ثلاثة أضلاع، رأس المثلث هى نقطة يتلاقى فيها ضلعى المثلث. رمز المثلث هو Δ. إذن، المثلث فى الشكل 1-17 يمكن تسميته ΔABC أو ΔI؛ وأضلاعه هى $\overline{AB}$، $\overline{AC}$، و $\overline{BC}$ ؛ ورؤوسه هى A، B، وC؛ وزواياه $\angle A$، $\angle B$، و $\angle C$.

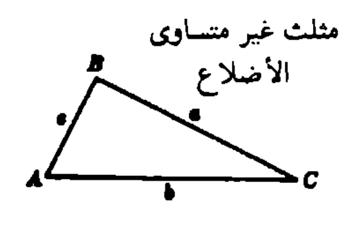


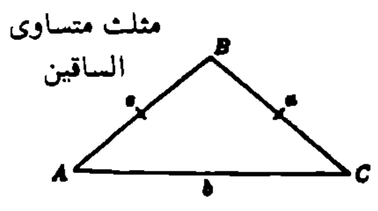
شكل 1-17

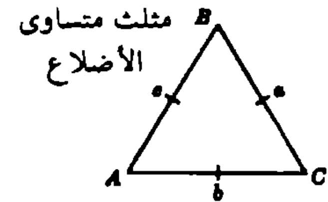
تصنيف المثلثات Classifying Triangles

تصنف المثلثات على حسب تساوى أطوال أضلاعـها أو علـى حسـب أنواع الزوايا التى تشتمل عليها.

المثلثات على حسب تساوى أطوال أضلاعها







شكل 1-18

1. *المثلـث غـير متسـاوى الأضـلاع* *Scalene triangle*: المثلـث غـير متساوى الأضلاع لا يوجـد بـه أى أضـلاع متطابقـة. فـى المثلـث غير متساوى الأضلاع ABC، $a \neq b \neq c$. الحرف الصغـير المسـتخدم لطول كل ضلع يتوافق مع الحرف الكبير للزاوية المقابلة.

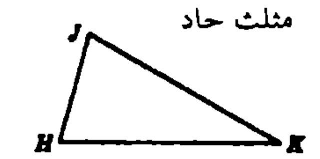


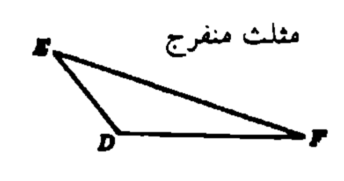
2. *المثلث المتسـاوى السـاقين* *Isosceles triangle*: المثلـث المتساوى الساقين هو مثلث يكون به على الأقل ضلعـان متطابقان. فى المثلث المتســاوى السـاقين ABC، $a = c$. هـذان الضلعـان يسـميان ســاقى المثلــث المتســاوى الساقين. الضلع المتبقى هو القاعدة b. الزاويتان اللتان تقعـان علـى أى مــن جـانبى القــاعدة همــا زاويتــا القاعدة. الزاوية المقابلة للقاعدة هى زاوية الرأس.

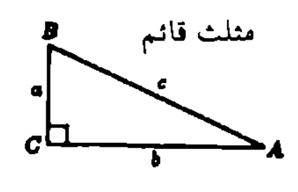
3. *المثلث المتساوى الأضلاع* *Equilateral triangle*: المثلث المتســاوى الأضلاع هو مثلث به ثلاث أضلاع متطابقة. فى المثلث المتساوى الأضلاع ABC، $a = b = c$.

المثلث المتساوى الأضلاع هو مثلث متساوى الساقين أيضًا.

المثلثات على حسب نوع الزوايا





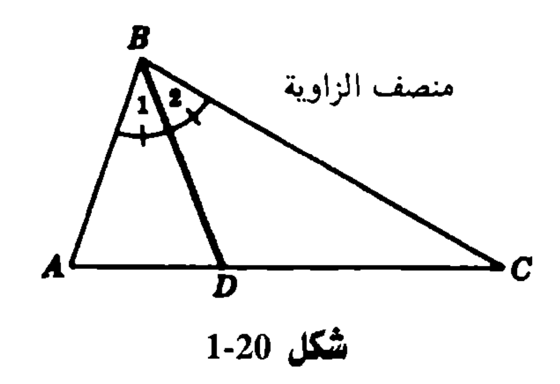


شكل 1-19

1. *المثلث القائم* *Right triangle*: المثلث القائم هو مثلث به زاوية قائمة. فى المثلث القائم ABC، $\angle C$ هى الزاوية القائمة. الضلع c المقابل للزاوية القائمة هو وتر المثلث. الأضلاع المتعامدة a, b هما ساقا أو ذراعا المثلث القائم.
2. *المثلث المنفرج* *Obtuse triangle*: المثلث المنفرج هو مثلث به زاوية منفرجة. فى المثلث المنفرج DEF، $\angle D$ هى الزاوية المنفرجة.
3. *المثلث الحاد* *Acute triangle*: المثلث الحاد هو مثلث به ثلاث زوايا حادة. فى المثلث الحاد HJK، $\angle H$، $\angle J$، و $\angle K$ زوايا حادة.

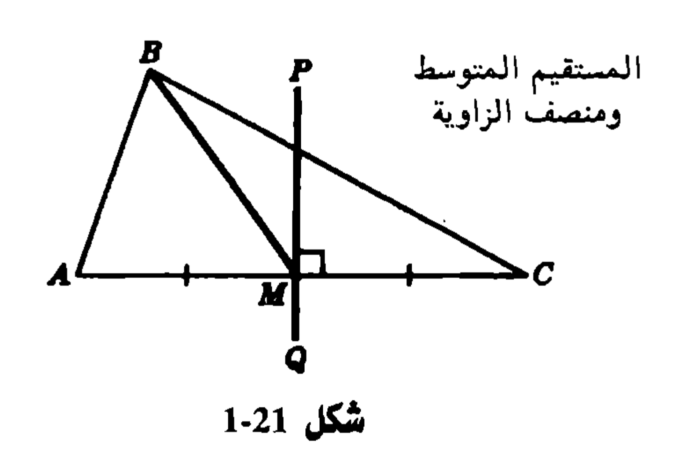
خطوط خاصة فى المثلث — Special Lines in a Triangle

1. *منصف الزاوية للمثلث* *Angle bisector of a triangle*: منصف الزاوية للمثلث هو قطعة مستقيمة أو شعاع ينصف الزاوية ويمتد إلى الضلع المقابل. إذن، $\overline{BD}$ منصف الزاوية $\angle B$ فى الشكل 1-20 ينصف $\angle B$ ويجعل $\angle 2 = \angle 1$.



شكل 1-20

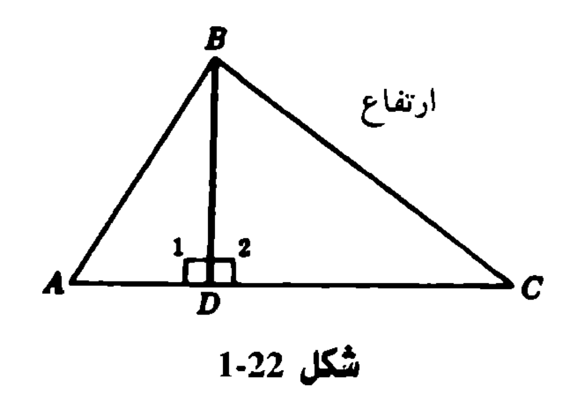
2. *المستقيم المتوسط للمثلث* *Median of a triangle*: المستقيم المتوسط للمثلث هو قطعة مستقيمة تمتد من الرأس وحتى نقطة التنصيف للضلع المقابل. إذن، $\overline{BM}$ المستقيم المتوسط للضلع $\overline{AC}$ فى الشكل 1-21 ينصف $\overline{AC}$ ويجعل $AM = MC$.



شكل 1-21

3. *المنصف العمودى لضلع* *Perpendicular bisector of a side*: المنصف العمودى لضلع فى مثلث هو خط ينصف ويتعامد على الضلع. إذن $\overleftrightarrow{PQ}$ المنصف العمودى للضلع $\overline{AC}$ فى الشكل 1-21 ينصف $\overline{AC}$ وعمودى عليه.

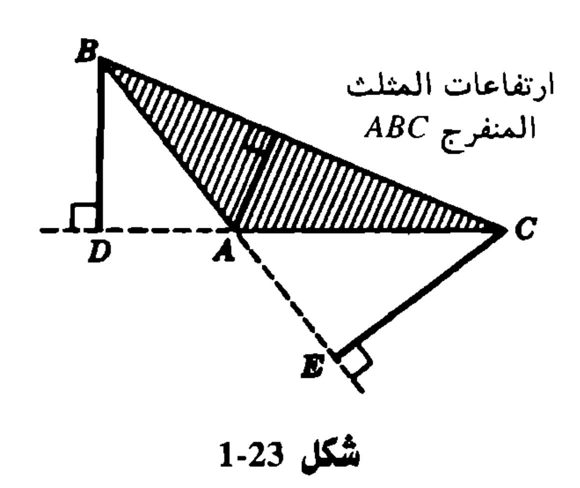
4. *الارتفاع إلى ضلع مثلث* *Altitude to a side of a triangle*: ارتفاع المثلث هو قطعة مستقيمة من الرأس وعمودية على الضلع المقابل. إذن $\overline{BD}$ الارتفاع إلى $\overline{AC}$ فى الشكل 1-22 عمودى على $\overline{AC}$ ويكون زاويتان



شكل 1-22

قائمتان 1 و 2. كل من منصف الزاوية، المستقيم المتوسط وارتفاع المثلث يمتد من الرأس إلى الضلع المقابل.

5. *ارتفاع المثلث المنفرج* *Altitude of obtuse triangle*: فى المثلث المنفرج، الارتفاع المرسوم على أى من جانبى الزاوية المنفرجة يقع خارج المثلث. إذن، فى المثلث ABC (المظلل) فى الشكل 1-23، الارتفاعان $\overline{BD}$ و $\overline{CE}$ يقعان خارج المثلث. فى كل حالة، ضلع من أضلاع الزاوية المنفرجة يجب أن يمتد.

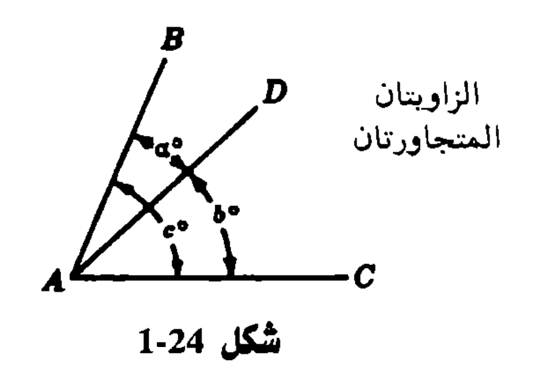


شكل 1-23

أزواج الزوايا Pairs of Angles

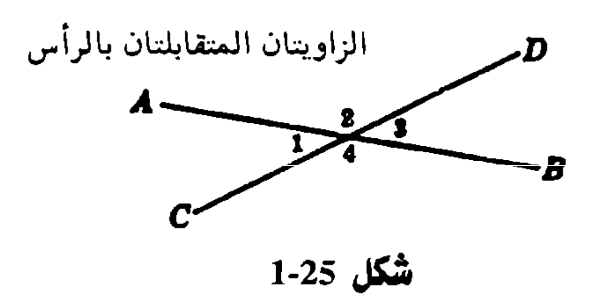
أنواع أزواج الزوايا Kinds of Pairs of Angles

1. *الزاويتان المتجاورتان* *Adjacent Angles*: الزاويتان المتجاورتان هما زاويتان لهما نفس الرأس وضلع مشترك بينهما. إذن، الزاوية $c°$ بمجملها فى الشكل 1-24 تم قطعها إلى زاويتين متجاورتين $a°$ و $b°$. هاتان الزاويتان المتجاورتان لهما نفس الرأس A، وضلع مشترك $\overrightarrow{AD}$ بينهما. هنا، $a° + b° = c°$.



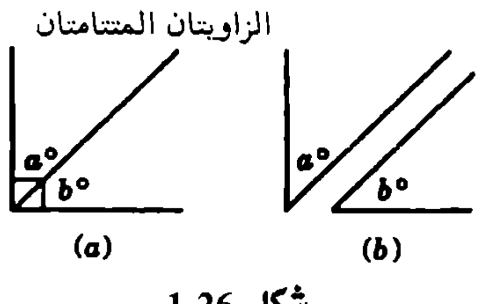
شكل 1-24

2. *الزاويتان المتقابلتـان بـالرأس* *Vertical Angles*: الزاويتـان المتقابلتـان بالرأس هما زاويتان غير متجـاورتين تكونتـا مـن خطيـن متقـاطعين. إذن، ∠1 و∠3 فـى الشكـل 1-25 همـا زاويتـان متقابلتـان بـالرأس تتكونان مـن الخطين المتقاطعين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$. أيضا ∠2 و∠4 هما زوج آخر من الزوايا المتقابلة بالرأس متكونة من نفس الخطين.



شكل 1-25

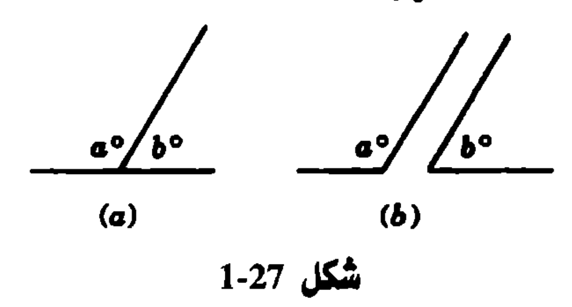
3. *الزاويتان المتتامتـان* *Complementary Angles*: الزاويتـان المتتامتـان هما زاويتان مجموع قياسهما يساوى 90° إذن، فى الشكـل 1-26(*a*) الزاويتان $a°$ و $b°$ هما زاويتان متجاورتان متتامتان. ومع ذلك، فـى (*b*) الزاويتـان المتتامتـان غـير متجـاورتين. فـى كـل حالـة، $a° + b° = 90°$. أى من الزاويتين المتتامتين يقال أنه متمم للآخر.



شكل 1-26

4. *الزاويتان المتكاملتان* *Supplementary Angles*: الزاويتان المتكاملتان هما زاويتان مجموع قياسهما يساوى 180°. إذن، فى الشكل 27-1(a) الزاويتان $a°$ و $b°$ هما زاويتان متجاورتان متكاملتان. ومع ذلك، فى (b) الزاويتان المتكاملتان غير متجاورتين. فى كل حالة، $a° + b° = 180°$. أى من الزاويتين المتكاملتين يقال أنه مكمل للآخر.

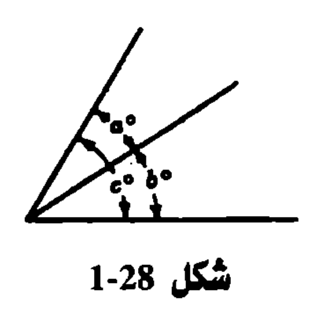
الزاويتان المتكاملتان



شكل 27-1

قواعد أزواج الزوايا — Principles of Pairs of Angles

قاعدة 1: إذا تم قطع الزاوية $c°$ إلى زاويتين متجاورتين $a°$ و $b°$، إذن $a° + b° = c°$. بالتالى، إذا كانت $a° = 25°$ و $b° = 35°$ فى الشكل 28-1، إذن $c° = 25° + 35° = 60°$.

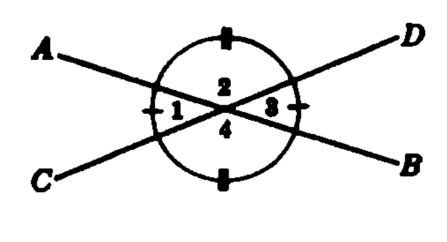


شكل 28-1

قاعدة 2: الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

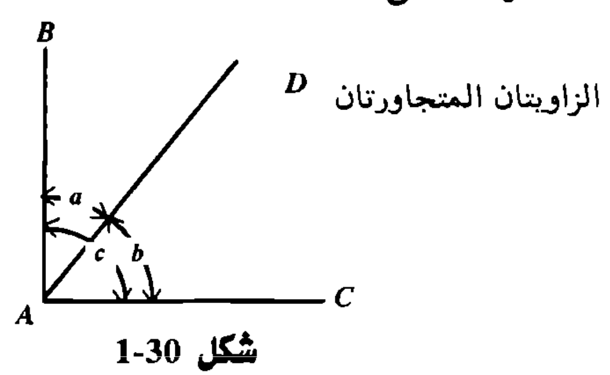
بالتالى، إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ خطان مستقيمان فى الشكل 29-1.

إذن $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$. من هنا، إذا كان $m\angle 1 = 40°$ إذن، $m\angle 3 = 40°$ وفى هذه الحالة $m\angle 2 = m\angle 4 = 140$.



شكل 1-29

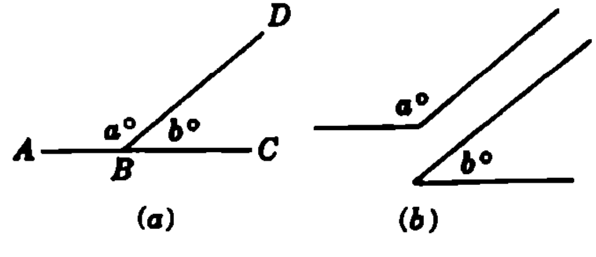
قاعدة 3: إذا كانت الزاويتان المتتامتان تحتويان $a°$ و $b°$، إذن $a°+b°=90°$.
بالتالى، إذا كانت $a°$ و $b°$ متتامتان و $a°=40°$ إذن $b°=50$
[انظر الشكل 1-30].



شكل 1-30

قاعدة 4: الزوايا المتجاورة متتامة إذا كانت الأضلاع الخارجية متعامدة على بعضها. إذن، فى الشكل 1-30، $a°$ و $b°$ زاويتان متتامتان حيث أن الضلعين الخارجيين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ متعامدين على بعضهما البعض.

قاعدة 5: إذا كانت الزاويتان المتكاملتان تحتويان $a°$ و $b°$، إذن $a° + b° = 180°$.



شكل 1-31

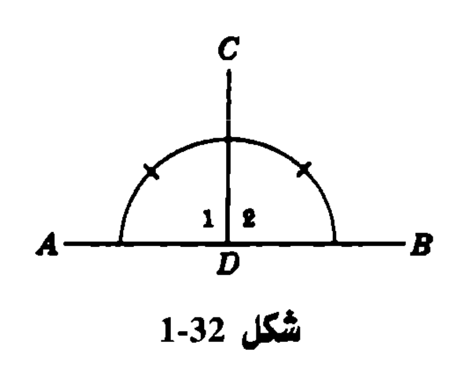
بالتالى إذا كانت الزاويتان $a°$ و $b°$ متكاملتين و $a° = 140°$ إذن $b° = 40°$ [انظر الشكل (a), (b) 1–31].

قاعدة 6: الزوايا المتجاورة متكاملة إذا كانت الأضلاع الخارجية تقع على نفس الخط.

بالتالى، فى الشكل (a) 1-31، $a°$ و $b°$ هما زاويتان متكاملتان بما أن الضلعين الخارجيين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ يقعان على نفس الخط المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$.

قاعدة 7: إذا كانت الزوايا المتكاملة متطابقة، تكون كل زاوية منهما زاوية قائمة. (الزوايا المتكاملة المتساوية زوايا قائمة).

بالتالى إذا كانت $\angle 1$ و$\angle 2$ فى الشكل 1-32 متطابقتين ومتكاملتين. إذن كل منهما زاوية قائمة.



شكل 1-32

الفصل الثانى
التفكير الاستدلالى
Deductive Reasoning

فى هذا الفصل:

- ✓ **البرهان بالتفكير الاستدلالى**
- ✓ **التفكير الاستدلالى فى الهندسة**
- ✓ **تحديد الفرضية والاستنتاج**
- ✓ **إثبات النظرية**

البرهان بالتفكير الاستدلالى
Proof by Deductive Reasoning

التفكير الاستدلالى هو برهان **Deductive Reasoning is Proof**



التفكير الاستدلالى يمكننا من اشتقاق استنتاجات حقيقية أو مقبولة كحقيقة من تعبيرات حقيقية أو مقبولة كحقيقة. ويتكون من ثلاثة خطوات كما يأتى:

1. بناء تعبير عام General Statement يشير إلى مجموعة كاملة أو فئة من الأشياء، مثل فئة الكلاب: كل الكلاب من الحيوانات ذوات الأربع (لها أربع أرجل).

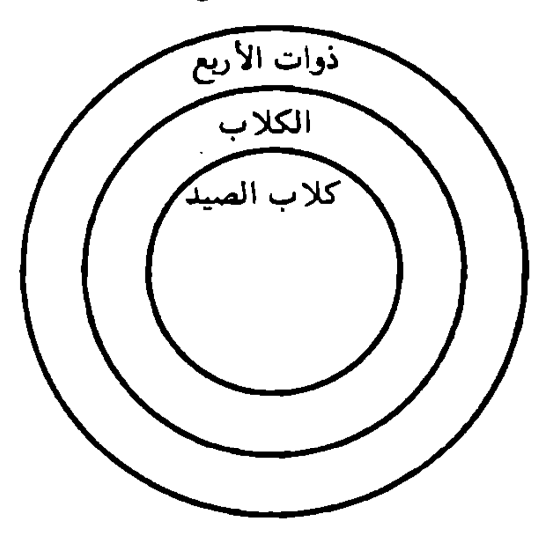
2. بناء تعبير محدد Particular Statement عن واحد أو بعض أعضاء المجموعة أو الفئة المشار إليها فى التعبير العام: كل كلاب الصيد من الكلاب.

3. بناء استدلال Deduction يتبع بالمنطق عند تطبيق التعبير العام على التعبير المحدد: كل كلاب الصيد من ذوات الأربع.

التفكير الاستدلالى Syllogistic Reasoning يسمى تفكير قياسى لأن التعبيرات الثلاثة معًا يشكلون قياس منطقى. فى القياس المنطقى، التعبير العام هو المقدمة الكبرى Major Premise، التعبير المحدد هو المقدمة الصغرى Minor Premise والاستدلال هو الاستنتاج Conclusion. إذن، فى القياس المنطقى بأعلى:

1. المقدمة الكبرى هى: كل الكلاب من ذوات الأربع.
2. المقدمة الصغرى هى: كل كلاب الصيد من الكلاب.
3. الاستنتاج هو: كل كلاب الصيد من ذوات الأربع.

استخدم دائرة كما فى الشكل 1-2، لتمثيل كل مجموعة أو فئة لتساعدك عل فهم العلاقات المتضمنة فى التفكير الاستدلالى.



شكل 1-2

1. بما أن المقدمة الكبرى أو التعبير العام ينص على أن كل الكلاب

من ذوات الأربع، الدائرة التى تمثل الكلاب يجب أن تكون داخل دائرة ذوات الأربع.

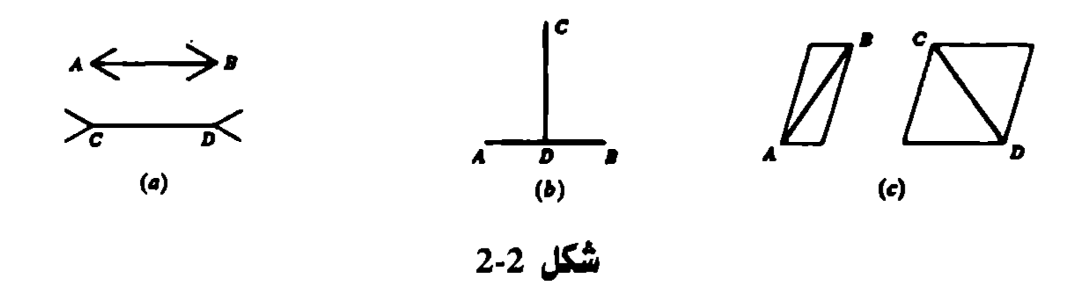
2. بما أن المقدمة الصغرى أو التعبير المحدد ينص على أن كل كلاب الصيد من الكلاب، الدائرة التى تمثل كلاب الصيد على أنهم كلاب يجب أن تكون داخل دائرة الكلاب.

3. الاستنتاج واضح. بما أن دائرة كلاب الصيد يجب أن تكون داخل دائرة ذوات الأربع، الاستنتاج الوحيد الممكن هو أن كلاب الصيد من ذوات الأربع.

الملاحظة، القياس، والتجربة ليسوا برهان

Observation, Measurement, and Experimentation Are Not Proof

1. الملاحظة Observation لا يمكن أن تخدم كبرهان. المظاهر يمكن أن تكون مضللة. لذلك، فى كل جزء من الشكل 2-2، *AB* لا يبدو أنه يساوى *CD* على الرغم من أنه فى الواقع يساويه.



شكل 2-2

2. القياس Measurement لا يمكن أن يخدم كبرهان. القياس يطبق فقط على العدد المحدود من الحالات المشتملة عليه. الاستنتاج الذى يعطيه ليس دقيقاً ولكنه تقريبى، يعتمد على دقة أداة القياس وعناية الملاحظ.

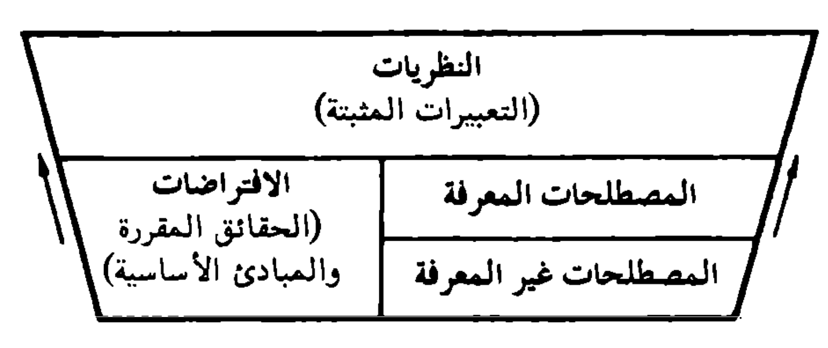
3. التجربة Experiment لا يمكن أن تخدم كبرهان. استنتاجاتها هى استنتاجات محتملة فقط. درجة الاحتمال تعتمد على الأوضاع أو المراحل المحددة التى تبحث فى عملية التجربة. لذلك فإنه من

المحتمل أن يكون زوج من الزهر مُحمل إذا أظـهر العـدد 7 عشـر مرات متتالية، والاحتمالية تكون أكـبر إذا أظـهر العـدد 7 عشـرون مرة، ومع ذلك أى الاحتمالين ليس بيقين.

التفكير الاستدلالى فى الهندسة

Deductive Reasoning in Geometry

أنـواع المصطلحـات والتعبـيرات التـى نوقشـت فـى هـذا الجـزء تؤلـف التركيب الاستدلالى للهندسة والتى يمكن تصويرها كما فى الشكل 3-2.



التركيب الاستدلالى للهندسة

شكل 3-2

المصطلحات غير المعرفة والمعرفة Undefined and Defined Terms

نقطة، خط، وسطح هى المصطلحات فـى الهندسـة التـى بالاتفـاق غـير معرفة. هذه المصطلحات غير المعرفـة تبـدأ بـها عمليـة التعريـف فـى الهندسة وتشكل الأساس لتعريف كل المصطلحات الهندسية الأخرى.

يمكننا تعريف المثلـث بدلالـة المضلـع، المضلـع بدلالـة الشكـل الهندسـى، الشكـل الهندسـى كشكـل متكون من قطع مستقيمة أو أجزاء مـن خطـوط. ومـع ذلك، عملية التعريف لا يمكن اسـتكمالها إلـى أبعـد من ذلك لأن مصطلح "الخط" غير معرف.

الافتراضات (الحقائق المقررة والمبادئ الأساسية)

Assumptions (Axioms and Postulates)

التركيب الكلى للبرهان فى الهندسة يرتكز على، أو يبدأ ببعض التعبيرات العامة غير المثبتة والتى تسمى مبادئ أساسية. وهذه التعبيرات يجب علينا افتراضها أو قبولها كحقيقة تلقائيًا ليكون بإمكاننا استنتاج تعبيرات أخرى. عندما نرسم خط مستقيم بين نقطتين، فإننا نبرر ذلك باستخدام المبدأ الأساسى "أى نقطتين يحددان خطًا مستقيمًا واحدًا وواحدًا فقط" كسبب لذلك. هذا السبب هو فرض حيث أننا نعتبره صحيح بدون الاحتياج إلى مبرر أو إثبات أبعد من ذلك.

مبادئ جبرية أساسية Algebraic Postulates

مبدأ 1: الأشياء التى تساوى نفس الأشياء أو أشياء متساوية، تساوى بعضها البعض. إذا كان $a=b$ و $c=b$، إذن $a=c$ (مبدأ الانتقال Transitive Postulate).

إذن، القيمة الكمية للدايم (عملة أجنبية) تساوى اثنان من النكلة (عملة أجنبية أصغر من الدايم) حيث أن كل منهما يساوى عشرة بينى (عملة أجنبية أصغر من النكلة).

مبدأ 2: أى كمية يمكن التعويض عنها بما يساويها فى أى تعبير أو معادلة (مبدأ التعويض Substitution Postulate).

بالتالى، إذا كان $x = 5$ و $y = x + 3$، يمكننا التعويض عن x بالقيمة 5 وإيجاد $y = 5 + 3 = 8$.

مبدأ 3: الكل يساوى مجموع أجزائه. (مبدأ التجزئة Partition Postulate).

إذن، القيمة الكلية للدايم، النكلة، والبينى هى 16 سنت (عملة أجنبية).

مبدأ 4: أى كمية تساوى نفسها (مبدأ الانعكاس أو مبدأ الوحدة Reflexive or Identity Postulate).

إذن $x = x$، $m\angle A = m\angle A$ و $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AB}$.

مبدأ 5: إذا جُمعت المتساويات على مستويات أخرى، يكون المجموع متساويًا. إذا كان $a = b$ و $c = d$، فإن $a + c = b + d$. (مبدأ الجمع Addition Postulate).

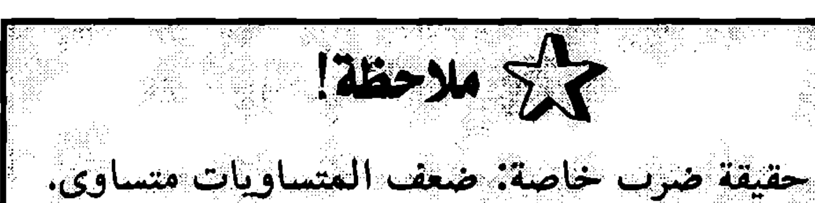
إذا كان	7 دايم = 70 سنت	إذا كان	$x + y = 12$
و	2 دايم = 20 سنت	و	$x - y = 8$
إذن	9 دايم = 90 سنت	إذن	$2x = 20$

مبدأ 6: إذا طرحت المتساويات من متساويات أخرى، تكون الفروق متساوية؛ إذا كان $a = b$ و $c = d$، إذن $a - c = b - d$ (مبدأ الطرح Subtraction Postulate).

إذا كان	7 دايم = 70 سنت	إذا كان	$x + y = 12$
و	2 دايم = 20 سنت	و	$x - y = 8$
إذن	5 دايم = 50 سنت	إذن	$2y = 4$

مبدأ 7: إذا تم ضرب المتساويات في متساويات أخرى، تكون نواتج الضرب متساوية؛ إذا كان $a = b$ و $c = d$، إذن $ac = bd$ (مبدأ الضرب Multiplication Postulate).

إذن، إذا كان سعر كتاب واحد هو $2، يكون سعر الثلاث كتب $6.



مبدأ 8: إذا تمت قسمة المتساويات على متساويات أخرى، تكون خوارج القسمة متساوية؛ إذا كان $a = b$ و $c = d$، إذن $a/c = b/d$ حيث $c, d \neq 0$ (مبدأ القسمة Division Postulate).

بالتالى، إذا كان سعر 4 lb من الزبد يساوى 80 سنت (80 cents). إذن، بنفس المعدل، سعر 2 lb يساوى 40 سنت (40 cents).

مبدأ 9: الأسس المتساوية للمتساويات تكون متساوية؛ إذا كان $a = b$ بالتالى $a^n = b^n$ (مبدأ الأسس Powers Postulate).

بالتالى، إذا كان $x = 5$، إذن $x^2 = 5^2$ أو $x^2 = 25$.

مبدأ 10: الجذور المتساوية للمتساويات تكون متساوية؛ إذا كان $a = b$ إذن $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$.

بالتالى، إذا كان $y^3 = 27$، إذن $3 = \sqrt[3]{27} = y$.

مبادئ هندسية أساسية Geometric Postulates

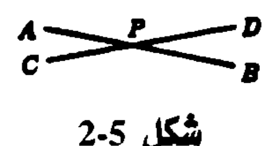
مبدأ 11: خط مستقيم واحد فقط يمكن رسمه خلال نقطتين.

إذن، $\overleftrightarrow{AB}$ هو الخط الوحيد الممكن رسمه بين A و B فى الشكل 2-4.

شكل 2-4

مبدأ 12: الخطان يمكن أن يتقاطعا عند نقطة واحدة فقط.

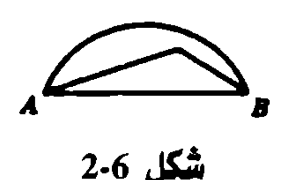
إذن P فقط هى نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ فى الشكل 2-5.



شكل 2-5

مبدأ 13: طول القطعة المستقيمة هو أقصر مسافة بين نقطتين.

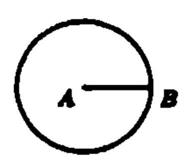
إذن $\overline{AB}$ أقصر من الخط المائل أو المنكسر بين A و B فى الشكل 2-6.



شكل 2-6

مبدأ 14: دائرة واحدة فقط يمكن رسمها بنقطة معلومة كمركز وقطع مستقيم معلوم كنصف قطر.

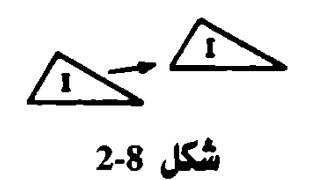
إذن الدائرة A فقط فى الشكل 2-7 يمكن رسمها بمركز A، ونصف قطر $\overline{AB}$.



شكل 2-7

مبدأ 15: أى شكل هندسى يمكن تحريكه بدون التغيير فى حجمه أو شكله.

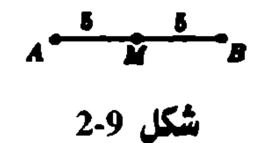
إذن، ΔI فى الشكل 2-8 يمكن تحريكه لموضع جديد بدون التغيير فى حجمه أو شكله.



شكل 2-8

مبدأ 16: القطع له نقطة تنصيف واحدة فقط.

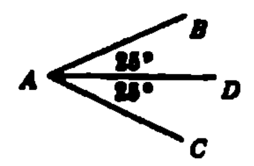
إذن، M هى نقطة تنصيف $\overline{AB}$ فى الشكل 2-9.



شكل 2-9

مبدأ 17: الزاوية لها منصف واحد فقط.

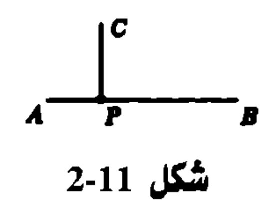
إذن، $\overrightarrow{AD}$ فقط هو منصف $\angle A$ فى الشكل 2-10.



شكل 2-10

مبدأ 18: خلال أى نقطة على خط، عمود واحد فقط يمكن رسمه على الخط.

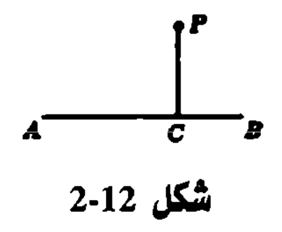
إذن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{PC}$ فقط عند النقطة P على $\overleftrightarrow{AB}$ (شكل 2-11).



شكل 2-11

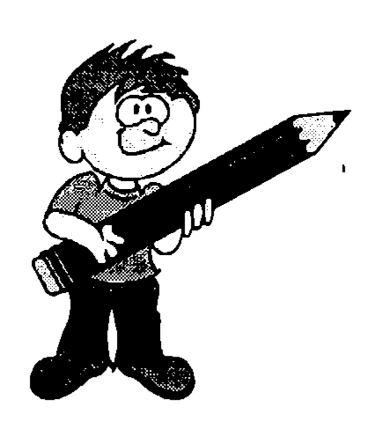
مبدأ 19: خلال أى نقطة خارج الخط، عمود واحد فقط يمكن رسمه على الخط المعلوم.

إذن، $\overrightarrow{PC}$ فقط يمكن رسمه عمودى على $\overleftrightarrow{AB}$ من النقطة P خارج $\overleftrightarrow{AB}$ فى الشكل 2-12.



شكل 2-12

نظريات Theorems



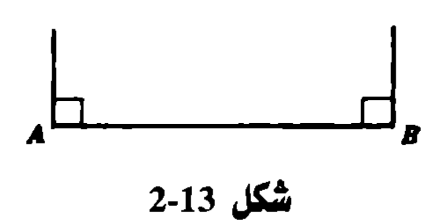
النظريات هى التعبيرات التى تم إثباتها فى الهندسة. باستخدام التعريفات، والافتراضات كأسباب فإننا نستنتج أو نثبت النظريات الأساسية. كلما استخدمنا كل نظرية جديدة لإثبات نظريات أكثر فإن عملية الاستنتاج تنمو. ومع ذلك، إذا كانت النظريات الجديدة تستخدم لإثبات نظرية سابقة، فإن التسلسل المنطقى ينتهك.

النظرية "مجموع قياس زوايا المثلث تساوى 180°" تستخدم لإثبات أن "مجموع قياس زوايا المخمس 540°". هذا بالتبعية، يمكننا من

إثبات أن "كل زاوية من زوايـا المخمـس المنتظـم قياسـها °108. ومـع ذلك يعتبر انتهاك للتسلسل المنطقى إذا حاولنا استخدام النظرية الأخيرة لإثبات أى من الاثنتين الأولتين.

قاعدة 1: كل الزوايا القائمة متطابقة Congruent.

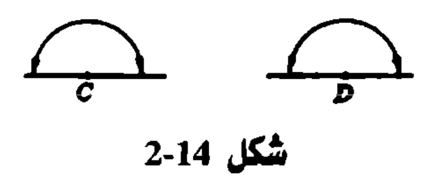
إذن $\angle A \cong \angle B$ فى الشكل 2-13.



شكل 2-13

قاعدة 2: كل الزوايا المستقيمة متطابقة.

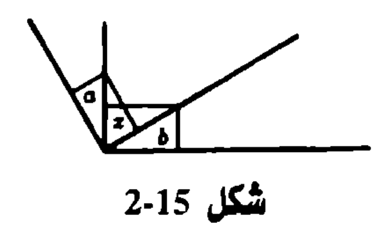
إذن $\angle C \cong \angle D$ فى الشكل 2-14.



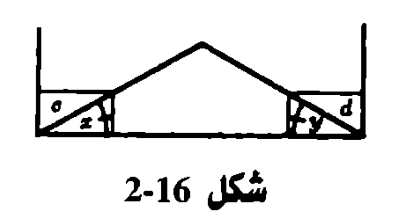
شكل 2-14

قاعدة 3: المتممات لنفس الزاوية أو الزوايا المتطابقة تكـون متطابقـة. وهذا توحيد للقاعدتين الآتيتين:

1. المتممات لنفس الزاوية متطابقة. إذن $\angle a \cong \angle b$ فـى الشكـل 2-15؛ كل منهما متمم $\angle x$.
2. المتممات للزوايا المتطابقة متطابقة. إذن $\angle c \cong \angle d$ فى الشكـل 2-16، متمماتهم هم الزوايا المتطابقة x و y.



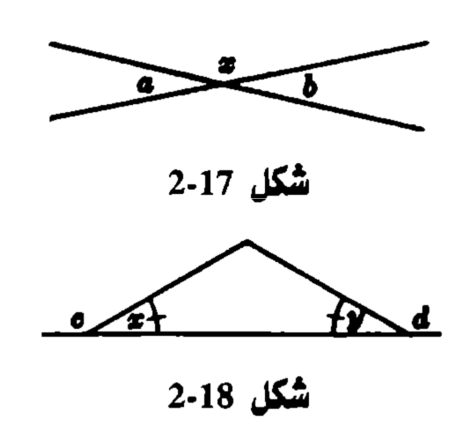
شكل 2-15



شكل 2-16

قاعدة 4: المكملات لنفس الزاوية أو الزوايا المتطابقة تكون متطابقــة. وهذا توحيد للقاعدتين الآتيتين:

1. المكملات لنفس الزاوية متطابقة. إذن $\angle a \cong \angle b$ فــى الشكــل 2-17؛ كل منهما مكمل $\angle x$.
2. المكملات للزوايا المتطابقة متطابقة. إذن، $\angle c \cong \angle d$ فى الشكــل 2-18؛ مكملاتهم هم الزوايا المتطابقة x و y.

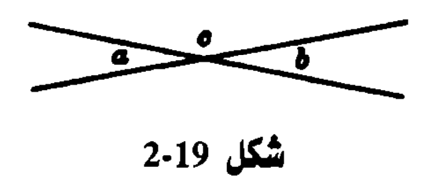


شكل 2-17

شكل 2-18

قاعدة 5: الزوايا المتقابلة الرأسية متطابقة.

إذن، فى الشكل 2-19، $\angle a \cong \angle b$؛ وهــذا يتبع من قاعدة 4 حيث $\angle a$ و $\angle b$ مكملات لنفس الزاوية.



شكل 2-19

تحديد الفرضية والاستنتاج

Determining the Hypothesis and Conclusion

أساليب التعبير: أسلوب المسند إليه - المسند وأسلوب إذا - إذن

Statement Forms: Subject-Predicate Form and If-Then Form

التعبيران "المعدن الذى يتعرض للتسخين يتمدد" و "إذا تعرض المعدن للتسخين، إذن، فإنه يتمدد" هما أسلوبان لنفس الفكرة. الجدول التالى يوضح كيف يمكن تقسيم كل أسلوب إلى جزئين مهمين وهما الفرضية Hypothesis والتى توضح ما هو معطى، والاستنتاج Conclusion والذى يوضح ما هو مطلوب إثباته. لاحظ أن، فى أسلوب إذا - إذن (if–then)، الكلمة إذن (then) يمكن حذفها.

أسلوب	الفرضية (ما هو معطى)	الاستنتاج (ما هو مطلوب إثباته)
أسلوب المسند إليه - المسند المعدن الذى يسخن يتمدد	**الفرضية هى المسند إليه** المعدن الذى يسخن	**الاستنتاج هو المسند** يتمدد
أسلوب إذا - إذن إذا سخن المعدن، إذن فإنه يتمدد	**الفرضية هى جملة إذا** إذا سخن الحديد	**الاستنتاج هو جملة إذن** إذن فإنه يتمدد

مقلوب التعبير

Converse of a Statement



مقلوب التعبير يتكون عن طريق تبديل الفرضية والاستنتاج. لتكوين مقلوب التعبير إذا - إذن بَدِل عبارة إذا وعبارة إذن. وفى حالة المسند إليه - المسند بدل المسند إليه والمسند.

إذن مقلوب "المثلثات أشكال مضلعة "هو" الأشكال المضلعة

مثلثات". أيضًا، مقلوب "إذا تم تسخين المعدن، إذن فإنه يتمدد" هو "إذا تمدد المعدن، إذن فإنه تم تسخينه". لاحظ إنه فى كل من هذه الأحوال التعبيرات صحيحة ، لكن مقلوبها ليس بالضرورة أن يكون صحيحًا.

قاعدة 1: مقلوب التعبير الصحيح ليس بالضرورة أن يكون صحيحًا.

إذن، التعبير "المثلثات أشكال مضلعة" صحيح ومقلوبه ليس بالضرورة أن يكون صحيحًا.

قاعدة 2: مقلوب التعريف دائمًا صحيح.

إذن، مقلوب التعريف "المثلث هو مضلع مكون من ثلاثة أضلاع" هو "المضلع المكون من ثلاثة أضلاع هو مثلث" كلاً من التعريف ومقلوبه صحيحين.

مسألة محلولة 2.1: عين الفرضية والاستنتاج لكل تعبير.

Solved Problem 2-1. Determine the hypothesis and conclusion of each statement.

التعبيرات	الحلول	
	الفرضية (المسند إليه)	**الاستنتاج (المسند)**
(*a*) الأعمدة تكون زوايا قائمة.	الأعمدة	تكون زوايا قائمة
(*b*) متممات نفس الزاوية متطابقة.	متممات نفس الزاوية	متطابقة
(*c*) المثلث المتساوى الأضلاع متساوى الزوايا.	المثلث المتساوى الأضلاع	متساوى الزوايا
(*d*) المثلث القائم الزاوية به زاوية قائمة واحدة.	المثلث القائم	به زاوية قائمة واحدة
(*e*) المثلث ليس شكل رباعى.	المثلث	ليس شكل رباعى

مسألة محلولة 2-2: عين الفرضية والاستنتاج لكل تعبير.

Solved Problem 2-2. Determine the hypothesis and conclusion of each statement.

التعبيرات	الحلول	
	الفرضية (جملة إذا)	الاستنتاج (جملة إذن)
(*a*) إذا نصف خط زاوية، إذن فهو يقسم الزاوية إلى جزئين متطابقين.	إذا نصف خط زاوية	إذن، فهو يقسم الزاوية إلى جزئين متطابقين.
(*b*) المثلث يكون به زاوية منفرجة إذا كان مثلث منفرجًا.	إذا كان المثلث منفرجًا	(إذن) المثلث يكون به زاوية منفرجة.
(*c*) إذا كانت الطالبة مريضة، يجب ألا تذهب إلى المدرسة.	إذا كانت الطالبة مريضة	(إذن) يجب ألا تذهب إلى المدرسة.
(*d*) الطالب، إذا كان يتمنى أن ينجح، يجب أن يذاكر بانتظام.	إذا كان يتمنى أن ينجح	(إذن) الطالب يجب أن يذاكر بانتظام.

إثبات النظرية Proving a Theorem

النظرية يجب أن تثبت باستخدام إجراء الخطوة بخطوة التالى. أسلوب البرهان موضح فى المثال الذى يلى الإجراء.

1. قسم النظرية إلى فرضيتها (ما هو معطى) واستنتاجها (ما هو مطلوب إثباته) خطط الفرضية بخط واحد، والاستنتاج بخط مزدوج.
2. على أحد الجوانب ارسم شكلاً توضيحيًا به علامات. العلامات على الشكل التوضيحى يجب أن تشتمل على رموز مساعدة مثل جوانب المربع للزوايا القائمة، رموز التساوى للأجزاء المتساوية. وعلامات استفهام للأجزاء المطلوب إثبات أنها متساوية.

3. على الجانب الآخر، بجانب الشكل التوضيحى، اذكر ما هو معطى وما هو مطلوب إثباته. "المعطى" و"المطلوب إثباته" يجب أن يشيران إلى أجزاء الشكل التوضيحى.
4. اعرض خطة. على الرغم من أنه ليس أساسى، ولكنه ينصح بعمل خطة. يجب أن تذكر الأساليب الرئيسية للبرهان التى ستستخدم.
5. على الجانب الأيسر، اذكر التعبيرات فى خطوات مرقمة متتالية. التعبير الأخير يجب أن يكون المطلوب إثباته. كل التعبيرات يجب أن تشير إلى أجزاء فى الشكل التوضيحى.
6. على الجانب الأيمن، بجانب التعبيرات، أوجد سبب لكل تعبير. الأسباب المقبولة فى إثبات النظرية تعطى كحقائق، تعريفات، مبادئ أساسية، نظريات مفترضة، ونظريات مثبته مسبقاً.

الخطوة 1: أثبت: كل الزوايا القائمة قياسها متساوى

الخطوة 2 و 3: معطى: $\angle A$ و $\angle B$ زوايا قائمة.

إثبات أن $m\angle A = m\angle B$

A B

الخطوة 4: الخطة: حيث أن كل زاوية تساوى 90°، الزوايا متساوية فى قياسها باستخدام المبدأ الأساسى 1: الأشياء المساوية لنفس الأشياء تكون مساوية لبعضها البعض.

الخطوة 5 و 6:

التعبيرات	الأسباب
1. $m\angle A$ و $m\angle B$ زوايا قائمة	1. معطى
2. كل من $m\angle A$ و $m\angle B$ = 90°	2. $m(\text{rt.}\angle) = 90°$
3. $m\angle A = m\angle B$	3. الأشياء = نفس الشىء = بعضها البعض.

مسألة محلولة 2-3. استخدم أسلوب البرهان لإثبات أن مكملات الزوايا المتساوية لها قياس متساوٍ.

Solved Problem 2-3. Use the proof procedure to prove that supplements of angles of equal measure have equal measure.

الخطوة 1: أثبت: مكملات الزوايا المتساوية لها قياس متساوٍ.

الخطوة 2 و 3: معطى: $\angle a$ مكمل $\angle 1$، $\angle b$ مكمل $\angle 2$.
$m\angle 1 = m\angle 2$ إثبات أن $m\angle a = m\angle b$.

الخطوة 4: باستخدام مبدأ الطرح، قياسات الزاوية المتساوية يمكن طرحها من مجموع القياسات المتساوية لأزواج الزوايا المتكاملة.
البواقي المتساوية هى قياسات المتكاملات.

الخطوة 5 و 6:

التعبيرات	الأسباب
1. $\angle a$ مكملة $\angle 1$ ، $\angle b$ مكملة $\angle 2$.	1. معطى
2. $m\angle a + m\angle 1 = 180°$ $m\angle b + m\angle 2 = 180°$	2. الزوايا المتكاملة هى مجموع الزوايا التى قياسها = 180°.
3. $m\angle a + m\angle 1 = m\angle b + m\angle 2$	3. الأشياء = نفس الشىء = بعضها البعض.
4. $m\angle 1 = m\angle 2$	4. معطى
5. $m\angle a = m\angle b$	5. إذا طرحت = من =، الفروق تكون =.

الفصل الثالث
المثلثات المتطابقة
Congruent Triangles

فى هذا الفصل:

- ✓ **المثلثات المتطابقة**
- ✓ **المثلثات المتساوية الساقين والمتساوية الأضلاع**

المثلثات المتطابقة Congruent Triangles

الأشكال المتطابقة هى أشكال لها نفس الحجم ونفس الشكل أى أنها نسخ مطابقة تمامًا لبعضها البعض. هذه الأشكال تتطابق بحيث تكون أجزاؤها المتناظرة مطابقة لبعضها. الدائرتان اللتان لهما نفس نصف القطر متطابقتان.

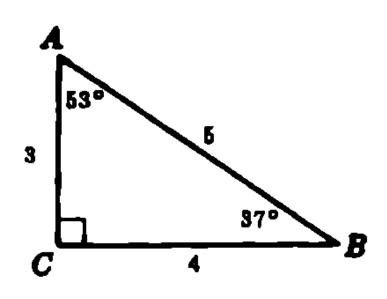
المثلثات المتطابقة هى مثلثات لها نفس الأبعاد ونفس الشكل.

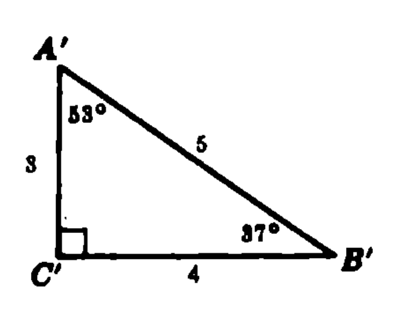
إذا تطابق مثلثان، فإن أضلاعهما وزواياهما المتناظرة يجب أن تكون متطابقة. إذن، المثلثان المتطابقان ABC و $A'B'C'$ فى الشكل 3-1 لهم أضلاع متناظرة متطابقة.

$$(AB \cong A'B', BC \cong B'C', AC \cong A'C')$$

وزوايا متناظرة متطابقة

$$(\angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B', \angle C \cong \angle C')$$



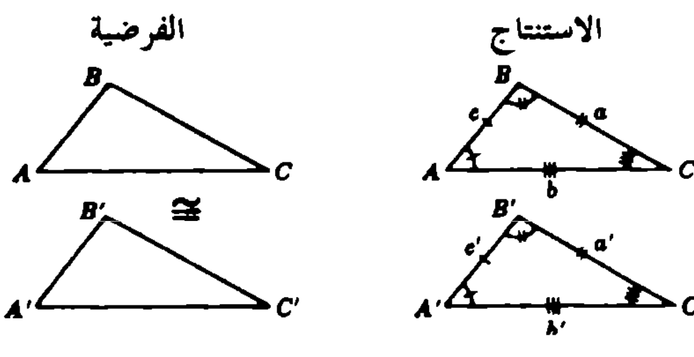


شكل 3-1

قواعد أساسية للمثلثات المتطابقة

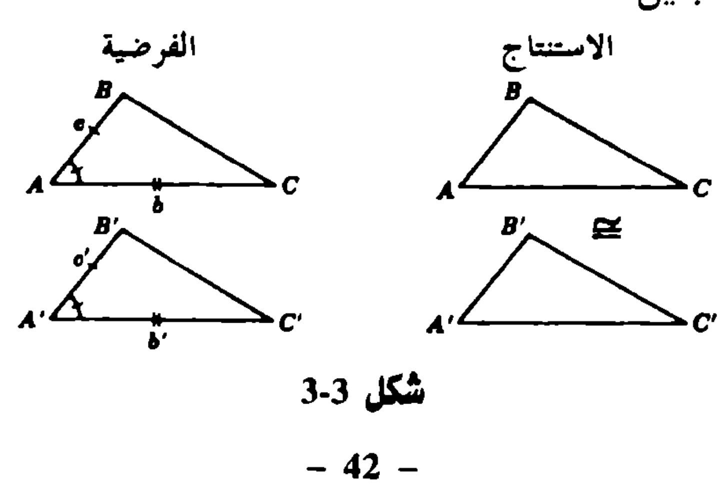
Basic Principles of Congruent Triangles

قاعدة 1: إذا تطابق مثلثان فإن أجزاءهما المتناظرة متطابقة (الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة تكون متطابقة)



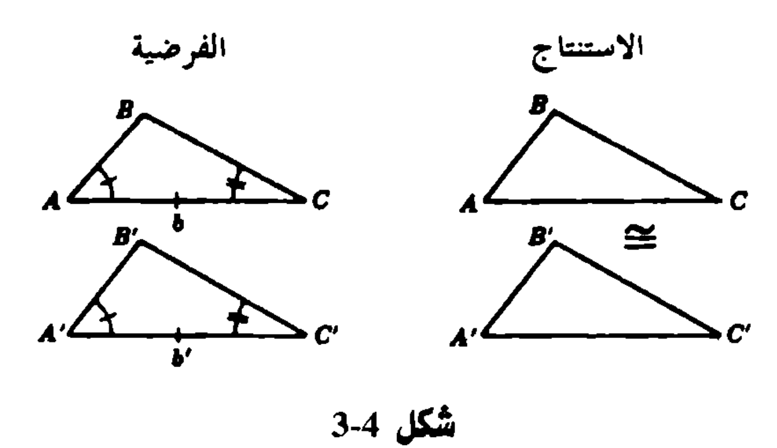
شكل 3-2

قاعدة 2: (s.a.s ≅ s.a.s) إذا تطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما لأحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر، فإن المثلثين يكونان متطابقين.



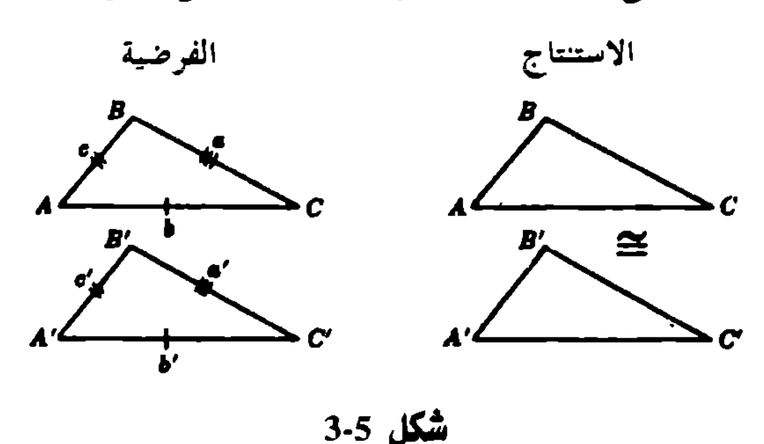
شكل 3-3

قاعدة 3: (a.s.a ≅ a.s.a) إذا تطابقت زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر، فإن المثلثين يكونان متطابقين.



شكل 3-4

قاعدة 4: (s.s.s ≅ s.g.s) إذا تطابق الثلاثة أضلاع فى أحد المثلثين مع نظائرها فى المثلث الآخر، فإن المثلثين يكونان متطابقين.



شكل 3-5

مسألة محلولة 3-1. أثبت أنه إذا كانت الأضلاع المتقابلة فى الشكل الرباعى متساوية وتم رسم خط قطرى، تتكون زوايا متساوية بين الخط القطرى والأضلاع.

Solved Problem 3-1. Prove that if the opposite sides of a quadrilateral are equal and a diagonal is drawn, equal angles are formed between the diagonal and the sides.

الحل

إذا كانت الأضلاع المقابلة فى الشكل الرباعى متطابقة وتم رسم خط قطرى، تتكون زوايا متطابقة بين الخط القطرى والأضلاع

المعطيات: الشكل الرباعى $ABCD$،

$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$،

$\overline{AC}$ خط قطرى.

إثبات أن: $\angle 4 \cong \angle 1$ و $\angle 3 \cong \angle 2$.

الخطة: إثبات أن $\Delta I \cong \Delta II$

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$	1. معطى
2. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	2. خاصية الانعكاس
3. $\Delta I \cong \Delta II$	3. s.s.s ≅ s.s.s.
4. $\angle 4 \cong \angle 1$ و $\angle 3 \cong \angle 2$	4. الأجزاء المتناظرة للـ ≅Δ تكون ≅.

المثلثات المتساوية الساقين والمتساوية الأضلاع

Isosceles and Equilateral Triangles

قواعد المثلثات المتساوية الساقين والمتساوية الأضلاع

Principles of Isosceles and Equilateral Triangles

قاعدة 1: إذا تطابق ضلعان لمثلث، تكون الزوايا المقابلة لهذين الضلعين متطابقة (زوايا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقة).

قاعدة 2: إذا تطابقت زاويتان لمثلث. تكون الأضلاع المقابلة لهاتين الزاويتين متطابقة (القاعدة 2 هى مقلوب القاعدة 1).

قاعدة 3: المثلث المتساوى الأضلاع هو مثلث متساوى الزوايا

(القاعدة 3 هي نتيجة للقاعدة 1). النتيجة للنظرية هـي نظرية أخرى بحيث أن مضمونها وإثباتها يتبع النظرية الأصلية.

قاعدة 4: المثلث المتساوى الزوايا هـو مثلث متساوى الأضلاع (القاعدة 4 هي مقلوب القاعدة 3 ونتيجة للقاعدة 2).

مسألة محلولة 3-2. أثبت أن منصف زاوية الرأس لمثلث متساوى الساقين هو المستقيم المتوسط للقاعدة.

Solved Problem 3-2. Prove that the bisector of the vertex angle of an isosceles triangle is a median to the base.

الحل

منصف زاوية الرأس لمثلث متساوى الساقين هو المستقيم المتوسط للقاعدة.

المعطيات: مثلث متساوى الساقين ΔABC

$(\overline{AB} \cong \overline{BC})$

$\overline{BD}$ ينصف $\angle B$

إثبات أن: $\overline{BD}$ المستقيم المتوسط لـ $\overline{AC}$.

الخطة: إثبات أن $\Delta I \cong \Delta II$ لإيجاد $\overline{AD} \cong \overline{DC}$.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	1. معطى
2. $\overline{BD}$ ينصف $\angle B$	2. معطى
3. $\angle 1 = \angle 2$.	3. التصنيف هـو التقسيم إلى جزئين متطابقين.
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. خاصية الانعكاس.
5. $\Delta I = \Delta II$	5. s.a.s ≅ s.a.s.
6. $\overline{AD} \cong \overline{DC}$	6. الأجزاء المتناظرة للـ ≅Δ تكون ≅.
7. $\overline{BD}$ المستقيم المتوسط لـ $\overline{AC}$	7. الخط من رأس Δ ومنصف للضلع المقابل هو مستقيم متوسط.

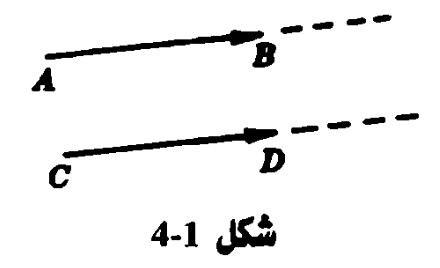
الفصل الرابع
الخطوط المتوازية، المسافات، ومجموع الزاوية
Parallel Lines, Distances, and Angle Sums

فى هذا الفصل:

- ✓ **الخطوط المتوازية**
- ✓ **المسافات**
- ✓ **مجموع قياس زاويا المثلث**
- ✓ **مجموع قياس زوايا المضلع**
- ✓ **نظريتان جديدتان للتطابق**

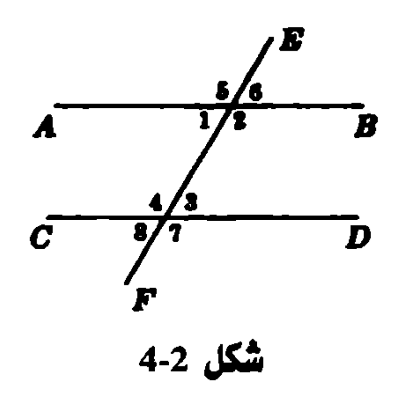
الخطوط المتوازية Parallel Lines

الخطوط المتوازية هى خطوط تقع فى نفس المستوى ولا تتقاطع أبدًا هما طال امتدادها. رمز التوازى هو //. إذن، $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{AB}$ تُقرأ "الخط $\overleftrightarrow{AB}$ موازى للخط $\overleftrightarrow{CD}$" (انظر الشكل 4-1).



شكل 4-1

الخط المستعرض Transversal لخطين أو أكثر هو الخط الذى يقطع هذه الخطوط. إذن $\overleftrightarrow{EF}$ هو خط مستعرض للخطين $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$، فى الشكل 4-2.



شكل 4-2

الزوايا الداخلية Interior Angles المتكونة من خطين يقطعهما خط مستعرض هى الزوايا بين هذين الخطين، بينما الزوايا الخارجية Exterior Angles هى الزوايا الواقعة خارج الخطين. إذن من الثمانى زوايا المتكونة من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ يقطعهما $\overleftrightarrow{EF}$ فى الشكل 4-2، الزوايا الداخلية هم $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$ والزوايا الخارجية هم $\angle 5$، $\angle 6$، $\angle 7$، $\angle 8$.

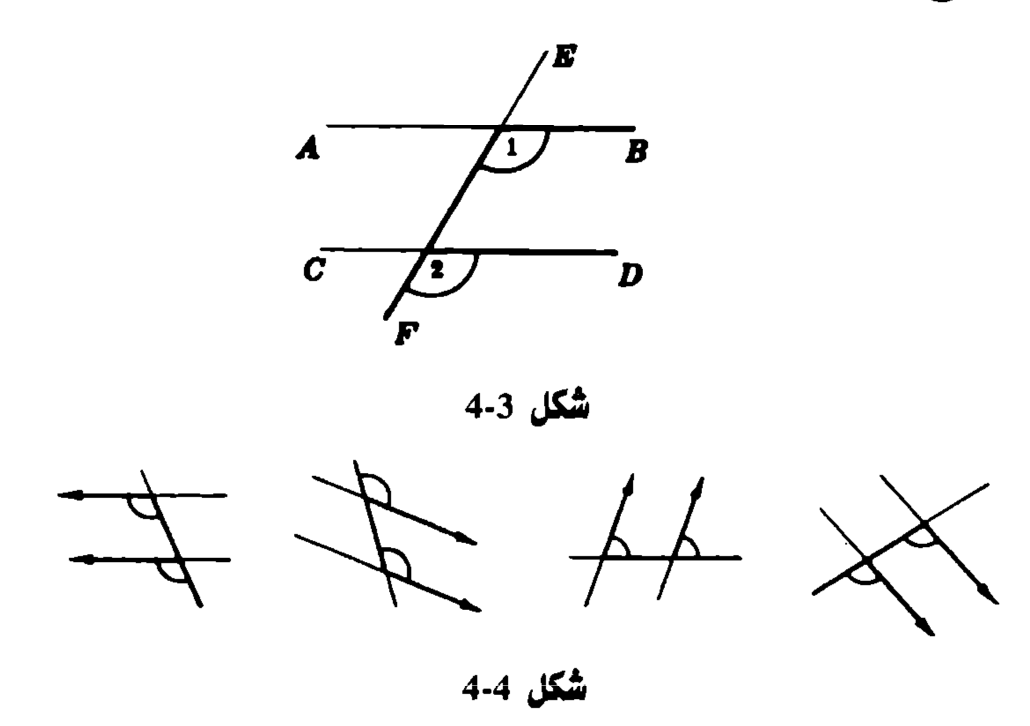
أزواج الزوايا المتكونة من خطين يقطعهما خط مستعرض

Pairs of Angles Formed by Two Lines Cut by a Transversal



الزوايا المتناظرة Corresponding Angles لخطين يقطعهما خط مستعرض هى زوايا على نفس الجانب من الخط المستعرض وعلى نفس الجانب من الخطين. إذن، $\angle 1$ و $\angle 2$ فى الشكل 4-3 هما زاويتان متناظرتان للخطين $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ يقطعهما الخط

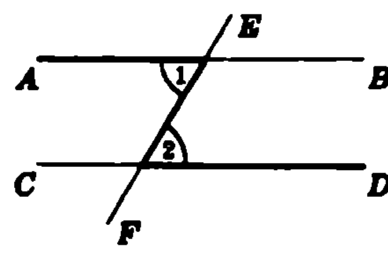
المستعرض $\overleftrightarrow{EF}$. عندما يقطع خط مستعرض خطين متوازيين فإن أضلاع الزاويتين المتناظرتين يكونان حرف F فى أوضاع مختلفة كما هو موضح فى الشكل 4-4.



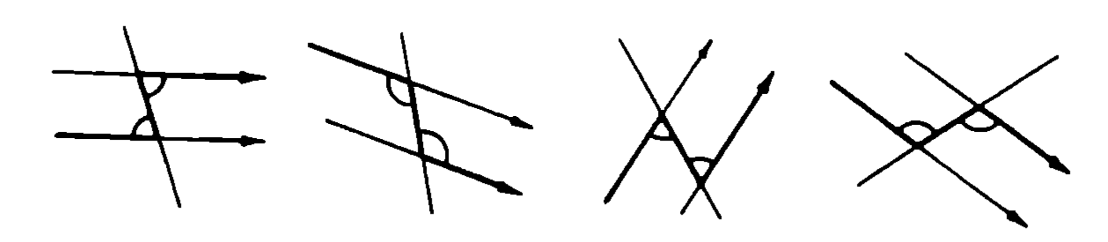
شكل 4-3

شكل 4-4

الزوايا الداخلية المتبادلة Alternate Interior Angles لخطين يقطعهما خط مستعرض هما زاويتان غير متجاورتين بين الخطين وعلى جوانب عكسية من الخط المستعرض. إذن ∠1 و ∠2 فى الشكل 4-5 هما زاويتان داخليتان متبادلتان للخطين $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ يقطعهما $\overleftrightarrow{EF}$. عندما يقطع خط مستعرض خطين متوازيين فإن جانبى الزاويتين الداخلتين المتبادلتين يكونان حرف Z أو N فى أوضاع مختلفة كما هو موضح فى الشكل 4-6.

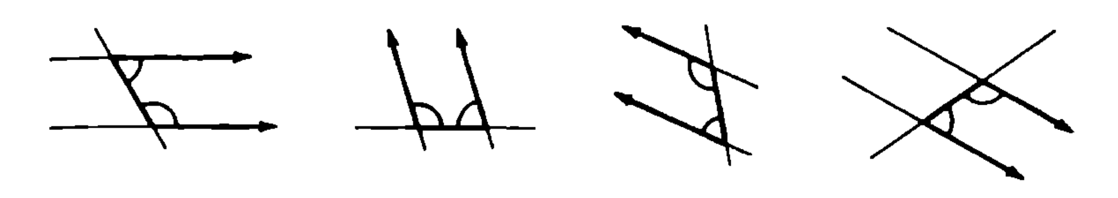


شكل 4-5



شكل 4-6

عندما يقطع خط مستعرض خطين متوازيين فإن الزوايا الداخلية على نفس الجانب من الخط المستعرض، يمكن تحديدها عن طريق حرف U المتكون من الأضلاع (شكل 4-7).



شكل 4-7

قواعد الخطوط المتوازية Principles of Parallel Lines

قاعدة 1: إذا كان معطى نقطة وخط مستقيم بحيث لا تقع النقطة على هذا الخط، يوجد خط واحد فقط يمكن رسمه من خلال هذه النقطة بحيث يوازى الخط المستعرض (مبدأ الخط المتوازى Parallel Line Postulate).

قاعدة 2: يكون الخطان متوازيين إذا كان زوج الزوايا المتناظرة متطابقة.

قاعدة 3: يكون الخطان متوازيين إذا كان زوج الزوايا المتبادلة الداخلية متطابقة.

قاعدة 4: يكون الخطان متوازيين إذا كان زوج الزوايا الداخلية على نفس الجانب من الخط المستعرض متكاملة.

قاعدة 5: تكون الخطوط متوازية إذا كانت عمودية على نفس الخط (الأعمدة على نفس الخط متوازية)

قاعدة 6: تكون الخطوط متوازية إذا كانت موازية لنفس الخط (المتوازيات لنفس الخط هى خطوط متوازية).

قاعدة 7: إذا كان الخطان متوازيين، فإن كل زوج من الزوايا المتناظرة متطابق (الزوايا المتناظرة للخطوط المتوازية متطابقة).

قاعدة 8: إذا كان الخطان متوازيين، يكون كل زوج من الزوايا المتبادلة الداخلية متطابق (الزوايا المتبادلة الداخلية للخطوط المتوازية متطابقة).

قاعدة 9: إذا كان الخطان متوازيين، يكون كل زوج من الزوايا الداخلية على نفس الجانب من الخط المستعرض متكاملة.

قاعدة 10: إذا كانت الخطوط متوازية، الخط العمودى على أحد هذه الخطوط يكون عمودى على الخطوط الأخرى أيضًا.

قاعدة 11: إذا كانت الخطوط متوازية، الخط الموازى لأحد هذه الخطوط يكون موازيًا للخطوط الأخرى أيضًا.

قاعدة 12: إذا كانت أضلاع زاويتين موازيتين لبعضهما على التوالى، تكون الزاويتان متطابقتين أو متكاملتين.

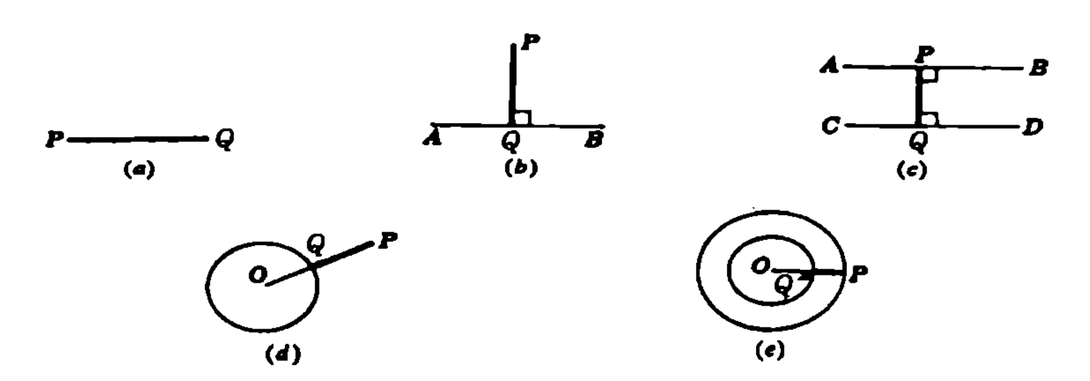
المسافات Distances

المسافات بين شكلين هندسيين

Distances Between Two Geometric Figures

المسافة بين شكلين هندسيين هى أقل طول قطعة مستقيمة بين هذين الشكلين.

1. المسافة بين نقطتين مثل P و Q فى الشكل (a) 4-8 هى القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ بينهما.



شكل 4-8

2. المسافة بين نقطة وخط مثل P و $\overleftrightarrow{AB}$ فى الشكل (b) 4-8 هى القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ العمودى من النقطة على الخط.

3. المسافة بين خطين متوازيين، مثل $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ فى الشكل (c) 4-8 هى القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ العمودى بين المتوازيين.

4. المسافة بين نقطة ودائرة، مثل P والدائرة فى الشكل (d) 4-8 هى القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ والتى تمثل جزء من القطعة $\overline{OP}$ بين النقطة والدائرة.

5. المسافة بين دائرتين متحدتى المركز، مثل الدائرتان اللتان مركزهما O هى القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$، وهو القطع لنصف القطر الأكبر الذى يقع بين الدائرتين كما هو موضح فى الشكل (e) 4-8.

قواعد المسافات Distance Principles

قاعدة 1: إذا كانت النقطة تقع على العمود المنصف لقطعة مستقيمة، إذن فإن النقطة تقع على بُعدٍ متساوٍ من نهايتى القطعة المستقيمة.

قاعدة 2: إذا كانت النقطة على بُعدٍ متساوٍ من نهايتى القطعة المستقيمة، إذن النقطة تقع على العمود المنصف للقطعة المستقيمة (قاعدة 2 هى مقلوب القاعدة 1).

قاعدة 3: إذا كانت النقطة تقع على منصف الزاوية، إذن فهى على بُعد متساوٍ من أضلاع الزاوية.

قاعدة 4: إذا كانت النقطة على بُعدٍ متساوٍ من أضلاع الزاوية، إذن النقطة تقع على الخط المنصف للزاوية (القاعدة 4 هى مقلوب القاعدة 3).

قاعدة 5: نقطتان كلاهما على بُعدٍ متساوٍ من نهايتى الخط المستقيم يعرفان يالعمود المنصف للقطع المستقيم. (الخط الواصل بين رؤوس مثلثين متساويى الساقين لهما قاعدة مشتركة هو العمود المنصف للقاعدة).

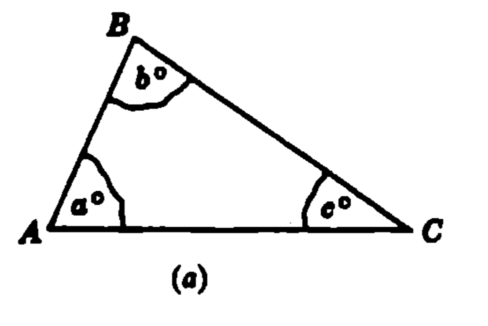
قاعدة 6: الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث تتقابل فى نقطة على بُعد متساوٍ من رؤوس المثلث.

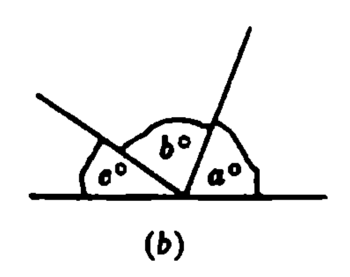
قاعدة 7: منصفات زوايا المثلث تتقابل فى نقطة تقع على بُعدٍ متساوٍ من أضلاع المثلث.

مجموع قياس زوايا المثلث

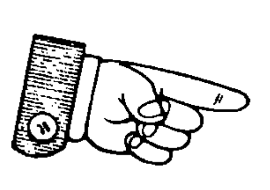
Sum of the Measures of the Angles of a Triangle

زوايا أى مثلث يمكن تقطيعها كما فى الشكل (a) 4-9 ثم تجميعها معًا كما فى الشكل (b). الثلاث زوايا سيكونوا زاوية مستقيمة.





شكل 4-9

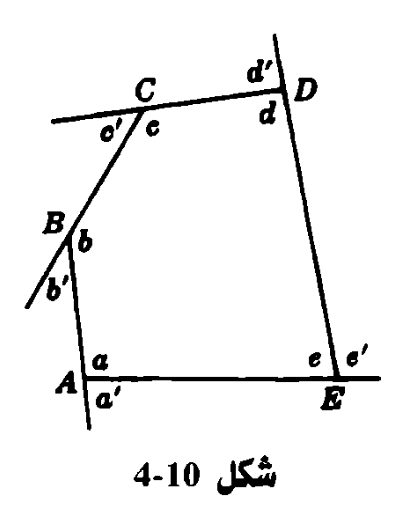


يمكننا إثبات أن مجموع قياس زوايا المثلث تساوى $180°$ عن طريق رسم خط من خلال أحد رؤوس المثلث يوازى الضلع المقابل للرأس فى الشكل 4-9، $\overleftrightarrow{MN}$ رُسم خلال B موازيًا للخط AC. لاحظ أن قياس الزاوية المستقيمة عند B يساوى مجموع قياس زوايا ΔABC معنى $a° + b° + c° = 180°$. كل زوج من الزوايا المتطابقة يمثل زوج من الزوايا المتبادلة الداخلية للخطوط المتوازية.

الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع

Interior and Exterior Angles of a Polygon

الزاوية الخارجة للمضلع تتكون عن طريق مد أحد الأضلاع خلال رأس من رؤوس المضلع . إذا تم مد كل ضلع من أضلاع المضلع كما هو موضح بالشكل 4-10 ستتكون زاوية خارجة عند كل رأس. كل زاوية خارجة من هذه الزوايا هى الزاوية المكملة لزاويتها الداخلة المتبادلة.



شكل 4-10

إذن، فى حالة الخماسى $ABCDE$ سيكون هناك خمس زوايا خارجة، واحدة عند كل رأس. لاحظ أن كل زاوية خارجة هى زاوية مكملة لزاوية داخلة متبادلة. مثال $m\angle a + m\angle a' = 180°$.

قواعد مجموع - قياس - الزاوية

Angle–Measure–Sum Principles

قاعدة 1: مجموع قياس زوايا المثلث تساوى قياس الزاوية المستقيمة.

قاعدة 2: إذا تطابقت زاويتان لمثلث مع زاويتين لمثلث آخر على التوالى، فإن الزوايا المتبقية تكون متطابقة.

قاعدة 3: مجموع قياس زوايا الشكل الرباعى تساوى 360°.

قاعدة 4: قياس كل زاوية خارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين غير المتجاورتين.

قاعدة 5: مجموع قياس الزوايا الخارجة لمثلث تساوى 360°.

قاعدة 6: قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الأضلاع تساوى 60°.

قاعدة 7: الزوايا الحادة لمثلث قائم هى زوايا متتامة.

قاعدة 8: قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الساقين تساوى 45°.

قاعدة 9: المثلث لا يمكن أن يحتوى على أكثر من زاوية قائمة واحدة.

قاعدة 10: المثلث لا يمكن أن يحتوى على أكثر من زاوية منفرجة واحدة.

قاعدة 11: الزاويتان تكونان متطابقتين أو متكاملتين إذا كانت أضلاعهما على التوالى متعامدة على بعضها البعض.

مجموع قياس زوايا المضلع

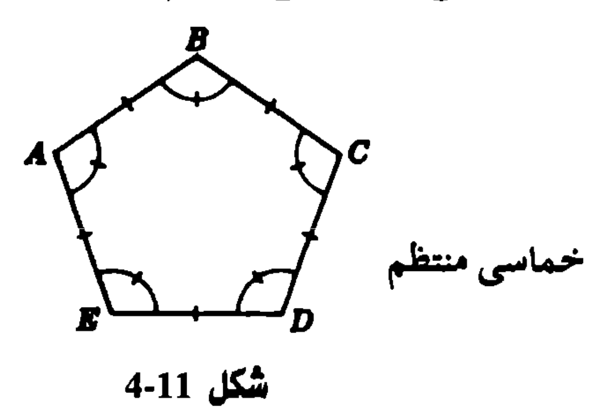
Sum of the Measures of the Angles of a Polygon

المضلع هو شكل مسطح مغلق محاط بقطع مستقيمة كأضلاع. يعتبر *n-gon* مضلع من n ضلع. إذن، المضلع المكون من 20 ضلعًا هو 20-gon.

أسماء المضلعات طبقًا لعدد الأضلاع

عدد الأضلاع	المضلع	عدد الأضلاع	المضلع
3	مثلث	8	مثمن
4	رباعى	9	تساعى
5	خماسى	10	معشر
6	سداسى (مسدس)	12	اثنى عشرى
7	سباعى	n	n–gon

المضلع المنتظم Regular Polygon هو مضلع متساوى الأضلاع والزوايا. إذن، الخماسى المنتظم هو مضلع به 5 زوايا متطابقة و 5 أضلاع متطابقة (شكل 4-11). المربع هو مضلع منتظم مكون من 4 أضلاع.



شكل 4-11

مجموع قياس الزوايا الداخلة لمضلع

Sum of the Measures of the Interior Angles of a Polygon

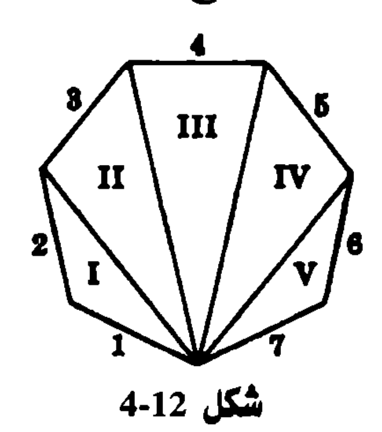
عن طريق رسم الخطوط القطرية من أى رأس إلى الرؤوس الأخرى كما فى الشكل 4-12، المضلع المكون من 7 أضلاع يمكن تقسيمه إلى 5 مثلثات. لاحظ أن كل مثلث له ضلع واحد من المضلع عدا المثلثين الأول والأخير لهما ضلعان من أضلاع المضلع.

بوجه عام، هذه العملية ستقسم المضلع المكون من n ضلع إلى $n-2$ مثلث. بمعنى أن عدد هذه المثلثات دائمًا أقل من عدد أضلاع المضلع باثنين.

مجمـوع قيـاس الزوايا الداخلـة للمضلـع تسـاوى مجمـوع قيـاس الزوايـا الداخلة للمثلث.

ملاحظة:

مجموع قياس الزوايا الداخلة للمضلع المكون من n ضلع = $(n-2)180°$.



شكل 4-12

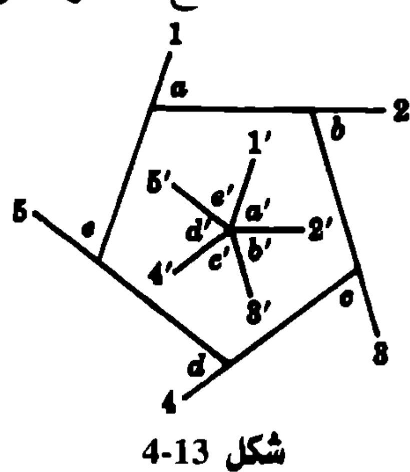
مجموع قياس الزوايا الخارجة للمضلع

Sum of the Measures of the Exterior Angles of a Polygon

الزوايا الخارجة للمضلع يمكن إعادة إنتاجها بحيث يكـون لـها نفـس الرأس. لعمل هذا، ارسم خطوط متوازية لأضلاع المضلع من نقطة ما، كما فى الشكل 4-13. إذا تم عمل ذلك، يمكن رؤيـة أنـه بغـض النظـر عن عدد الأضلاع، مجموع قياس الزوايا الخارجة يساوى 360°.

ملاحظة:

مجموع قياس الزوايا الخارجة للمضلع المكون من n ضلع = 360°.



شكل 4-13

لأى مضلع

قاعدة 1: إذا كانت S مجموع قياس الزوايا الداخلة لمضلع مكون من n ضلع، إذن

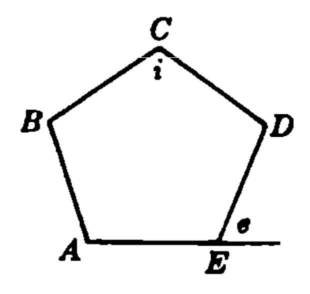
$S = n - 2$ زاوية مستقيمة $= (n - 2)\ 180°$

قاعدة 2: مجموع قياس الزوايا الخارجة لأى مضلع تساوى °360.

للمضلع المنتظم

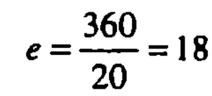
قاعدة 3: إذا كان للمضلع المنتظم المكون من n ضلع (شكل 4-14) زاوية داخلة قياسها i وزاوية خارجة قياسها e (بالدرجات). إذن

$$i = \frac{180(n-2)}{n} \quad e = \frac{360}{n} \quad \text{and } i + e = 180$$

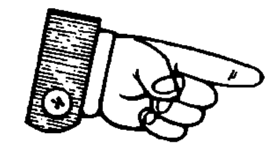


شكل 4-14

إذن، للمضلع المنتظم المكون من 20 ضلعًا



$$i = \frac{180(20-2)}{20} = 162$$



$$e = \frac{360}{20} = 18$$

$$i + e = 162 + 18 = 180$$

نظريتان جديدتان للتطابق

Two New Congruency Theorems

ثلاث وسائل لإثبات تطابق المثلثات تم تقديمهم هنا وهى:

1. s.a.s. ≅ s.a.s.

2. a.s.a. ≅ a.s.a.

3. s.s.s. ≅ s.s.s.

وسيلتان إضافيتان لإثبات تطابق المثلثات هما:

4. s.a.a. ≅ s.a.a.

5. hy. leg ≅ hy. leg

Two New Congruency Principles قاعدتان جديدتان للتطابق

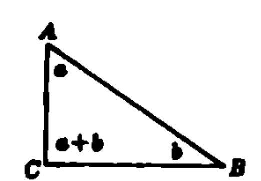
قاعدة 1: (s.a.a ≅ s.a.a) إذا كانت زاويتان وضلع مقابل لإحداهما فى مثلث مطابقين للأجزاء المناظرة لها فى مثلث آخر. إذن، المثلثان متطابقان.

قاعدة 2: (hy. leg ≅ hy. leg) إذا كان الوتر وساق فى مثلث قائم مطابقان للأجزاء المناظرة لها فى مثلث آخر قائم، إذن، المثلثان متطابقان.

مسألة محلولة 4-1. (a) أثبت أنه إذا كان قياس زاوية فى مثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الأخريين، يكون المثلث قائم الزاوية. (b) أثبت أنه إذا كانت الزوايا المتقابلة فى الشكل الرباعى متطابقة، تكون الأضلاع المتقابلة متوازية.

Solved Problem 4-1. (a) Prove that if the measure of one angle of a triangle equals the sum of the measures of the other two, then the triangle is a right triangle. (b) Prove that if the opposite angles of a quadrilateral are congruent, then its opposite sides are parallel.

الحل



(a) **المعطيات:** $\Delta ABC, m\angle C = m\angle A + m\angle B$.

إثبات أن: ΔABC مثلث قائم.

الخطة: إثبات أن $m\angle C = 90°$.

الإثبات الجبرى

نفرض a = عدد الدرجات فى $\angle A$.

b = عدد الدرجات فى $\angle B$.

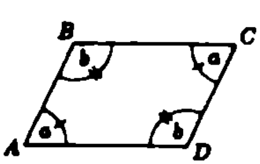
إذن $a + b$ = عدد الدرجات فى $\angle C$.

$$a + b + (a + b) = 180 \quad \text{(Pr. 1)}$$

$$2a + 2b = 180$$

$$a + b = 90$$

بما أن $m\angle C = 90°$، ΔABC هو مثلث قائم.



(b) **المعطيات:** الشكل الرباعى $ABCD$.

$\angle A \cong \angle C$ ، $\angle B \cong \angle D$

إثبات أن: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

الخطة: إثبات أن الزوايا الداخلة $\angle a$ علـى نفس الجانب من الخط المستعرض متكاملة.

الإثبات الجبرى

نفرض a = عدد الدرجات فى $\angle A$ و $\angle C$.

b = عدد الدرجات فى $\angle B$ و $\angle D$.

$$2a + 2b = 360 \quad \text{(Pr. 3)}$$

$$a + b = 180$$

بما أن $\angle A$ و $\angle B$ متكاملتان،

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

بما أن $\angle A$ و $\angle D$ متكاملتان،

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

الفصل الخامس
أشباه المنحرف ومتوازيات الأضلاع
Trapezoids and Parallelograms

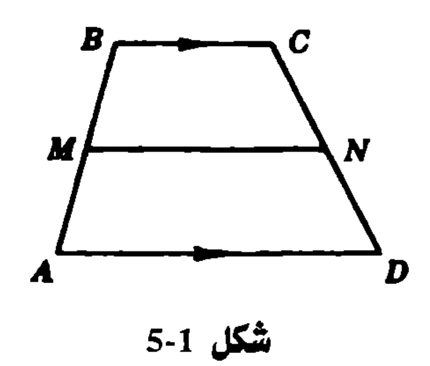
فى هذا الفصل:

- ✔ **أشباه المنحرف**
- ✔ **متوازيات الأضلاع**
- ✔ **متوازيات أضلاع خاصة**
  المستطيل، المعين، المربع

أشباه المنحرف Trapezoids

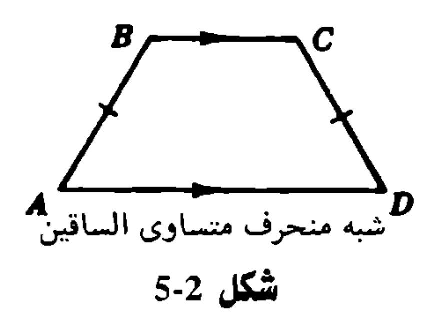
شبه المنحرف هو شكل رباعى به ضلعان فقط متوازيـان. قـاعدتى شبـه المنحرف هما الضلعان المتوازيان وساقيه هما الضلعان غير المتوازيين. المستقيم المتوسـط Median (القـاعدة المتوسـطة) لشبـه المنحرف هـو القطع الواصل بين نقطتى تنصيف الساقين.

إذن، فى شبـه المنحرف $ABCD$ فى الشكل 5-1، القاعدتان هما $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ والساقان هما $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$. إذا كان M و N هما نقطتا التنصيف. إذن $\overline{MN}$ هـو المستقيم المتوسط لشبـه المنحرف (القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف).



شكل 5-1

شبه المنحرف المتساوى الساقين Isosceles Trapezoid هو شبه منحرف ساقيه متطابقتين. إذن، فى شبه المنحرف المتساوى الساقين *ABCD* فى الشكل 5-2، $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. زوايا القاعدة لشبه المنحرف هى الزوايا التى تقع على نهايات القاعدة الأطول: $\angle A$، $\angle D$ هما زاويتا القاعدة لشبه المنحرف المتساوى الساقين *ABCD*.

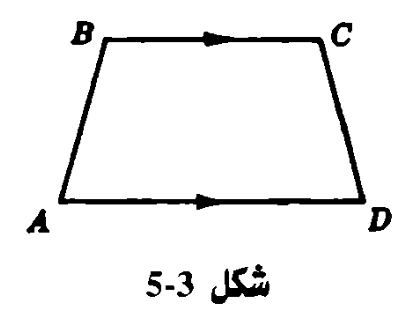


شكل 5-2

قواعد شبه المنحرف Trapezoid Principles

قاعدة 1: زوايا القاعدة لشبه المنحرف المتساوى الساقين متطابقة.

وبالتالى، فى شبه المنحرف *ABCD* فى الشكل 5-3، إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$، إذن $\angle A \cong \angle B$.

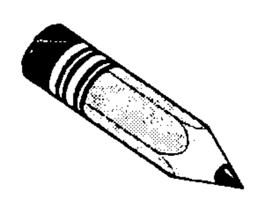


شكل 5-3

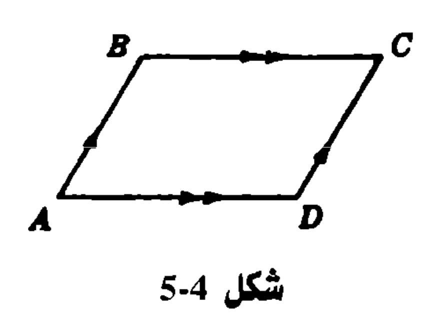
قاعدة 2: إذا كانت زاويتا القاعدة لشبه المنحرف متطابقتين، يكون شبه المنحرف متساوى الساقين.

وبالتالى، فى الشكل 3-5، إذا كان $\angle A \cong D$، إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

متوازيات الأضلاع Parallelograms



متوازى الأضلاع هو شكل رباعى أضلاعه المتقابلة متوازية. رمز متوازى الأضلاع $\square$. إذن فى $\square ABCD$ فى الشكل 4-5، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. إذا كانت الأضلاع المتقابلة لشكل رباعى متوازية، إذن الشكل هو متوزاى أضلاع. إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$، إذن $ABCD$ هو $\square$.



شكل 4-5

قواعد تشتمل على خصائص متوازيات الأضلاع

Principles Involving Properties of Parallelograms

قاعدة 1: الأضلاع المتقابلة لمتوازى الأضلاع متوازية.

قاعدة 2: الخط القطرى لمتوازيات الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

قاعدة 3: الأضلاع المتقابلة لمتوازى الأضلاع متطابقة.

قاعدة 4: الزوايا المتقابلة لمتوازى الأضلاع متطابقة.

قاعدة 5: الزوايا المتتابعة لمتوازى الأضلاع متطابقة.

قاعدة 6: الخطوط القطرية لمتوازى الأضلاع تنصف بعضها البعض.

إثبات أن الشكل الرباعى متوازى أضلاع

Proving a Quadrilateral is a Parallelogram

قاعدة 7: الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا كانت أضلاعــه المتقابلـة متوازية.

قاعدة 8: الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا كانت أضلاعــه المتقابلـة متطابقة.

قاعدة 9: الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا كانت به ضلعان متطابقان ومتوازيان.

قاعدة 10: الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا كــانت زوايــاه المتقابلـة متطابقة.

قاعدة 11: الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا كــانت خطوطـه القطريـة تنصف بعضها البعض.

متوازيات أضلاع خاصة: Special Parallelograms:

المستطيل، المعين، المربع Rectangle, Rhombus, Square

تعريفات وعلاقات متوازيات الأضلاع الخاصة

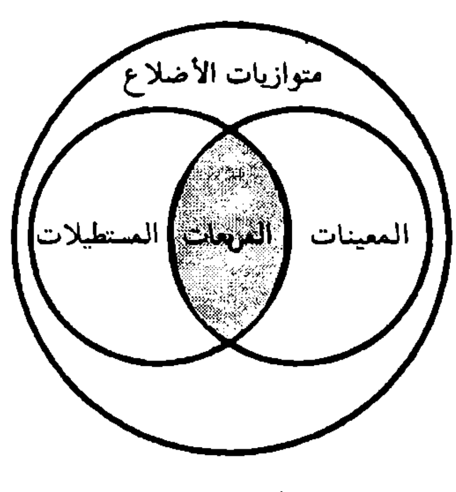
Definitions and Relationships among the Special Parallelograms

المستطيلات، المعينات، والمربعات تنتمى لمجموعة متوازيات الأضلاع. كل منها يمكن تعريفه كمتوازى أضلاع كالتالى:

1. المستطيل Rectangle متوازى أضلاع متساوى الزوايا.
2. المعين Rhombus متوازى أضلاع متساوى الأضلاع.
3. المربع Square متوازى أضلاع متساوى الأضلاع والزوايا.

إذن المربع هو مستطيل ومعين.

العلاقات بين متوازيـات الأضـلاع الخاصـة يمكـن توضيحـها عـن طريق رسم دائرة تمثل كل مجموعة (الشكل 5-5).



شكل 5-5

1. بما أن كل مستطيل وكل معين يجب أن يكون متوازى أضلاع، فإن الدائرة لمجموعة المستطيلات والدائرة لمجموعـة المعينـات يجـب أن تقع داخل دائرة مجموعة متوازيات الأضلاع.
2. بما أن كل مربع هو مستطيل ومعيـن، المقطـع المتداخـل والمظلـل يجب أن يمثل مجموعة المربعات.

قواعد تشتمل على خصائص متوازيات الأضلاع الخاصة

Principles Involving Properties of the Special Parallelograms

قاعدة 1: المستطيل، المعين أو المربع له نفس خصائص متوازى الأضلاع.

قاعدة 2: كل زاوية فى المستطيل زاوية قائمة.

قاعدة 3: الخطوط القطرية للمستطيل متطابقة.

قاعدة 4: كل أضلاع المعين متطابقة.

قاعدة 5: الخطوط القطرية للمعين منصفات متعامدة لبعضها البعض.

قاعدة 6: الخطوط القطرية للمعين تنصف زوايا الرأس .

قاعدة 7: الخطوط القطرية للمعين تُكوّن أربعة مثلثات متطابقة.

قاعدة 8: المربع له نفس خصائص المعين والمستطيل.

خصائص الخطوط القطرية لمتوازيات الأضلاع، المستطيلات، المعينات، المربعات

Diagonal Properties of Parallelograms, Rectangles, Rhombuses, and Squares

كل علامة فى الجدول التالى تدل على خاصية للخط القطرى بالنسبة للشكل.

خصائص الخط القطرى	متوازى الأضلاع	المستطيل	المعين	المربع
الخطوط القطرية تنصف بعضها البعض.	✓	✓	✓	✓
الخطوط القطرية متطابقة.		✓		✓
الخطوط القطرية متعامدة.			✓	✓
الخطوط القطرية تنصف زوايا الرأس.			✓	✓
الخطوط القطرية تُكوّن زوجين من المثلثات المتطابقة.	✓	✓	✓	✓
الخطوط القطرية تُكوّن 4 مثلثات متطابقة.			✓	✓

إثبات أن متوازى الأضلاع هو مستطيل، معين، أو مربع

Proving that a Parallelogram is a Rectangle, Rhombus, or a Square

إثبات أن متوازى الأضلاع مستطيل

Proving that a Parallelogram is a Rectangle

التعريف الأساسى أو الأدنى للمستطيل هو: المستطيل هو متوازى أضلاع به زاوية قائمة واحدة. بما أن الزوايا المتتالية لمتوازى الأضلاع متكاملة، إذا كانت زاوية واحدة قائمة، فإن الزوايا المتبقية يجب أن تكون قائمة.

ومقلوب هذا التعريف الأساسى ينتج عنه وسـيلة مفيدة لإثبات أن متوازى الأضلاع مستطيل كالتالى:

قاعدة 9: إذا كان متوازى الأضلاع به زاوية قائمة واحدة، إذن هو مستطيل.

قاعدة 10: إذا كان متوازى الأضلاع به خطوط قطرية متطابقة، إذن هو مستطيل.

إثبات أن متوازى الأضلاع معين

Proving that a Parallelogram is a Rhombus

التعريف الأساسى أو الأدنى للمعين هو: المعين هو متوازى أضلاع به أضلاع متجاورة متطابقة.

ومقلوب هذا التعريف ينتج عنه وسيلة مفيدة لإثبات أن متوازى الأضلاع معين كالتالى:

قاعدة 11: إذا كان متوازى الأضلاع به أضلاع متجاورة متطابقة، إذن هو معين.

Proving that a Parallelogram is a Square إثبات أن متوازى الأضلاع مربع

قاعدة 12: إذا كان متوازى الأضلاع به زاوية قائمة وضلعان متجاوران متطابقان، إذن هو مربع وهذا ينتج من حقيقة أن المربع هو مستطيل ومعين.

مسألة محلولة 5-1. أثبت أن الخط القطرى للمعين ينصف كل زاوية رأس يمر بها.

Solved Problem 5-1. Prove that a diagonal of a rhombus bisects each vertex angle through which it passes.

الحل



المعطيات: المعين $ABCD$

$\overline{AC}$ خط قطرى.

إثبات أن: $\overline{AC}$ ينصف $\angle A$ و $\angle C$.

الخطة: إثبات (1) $\angle 1$ و $\angle 2$ مطابقتان للزاوية $\angle 3$.

(2) $\angle 3$ و $\angle 4$ مطابقتان للزاوية $\angle 1$.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. $ABCD$ معين	1. معطى.
2. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	2. المعين متساوى الأضلاع.
3. $\angle 1 \cong \angle 3$	3. فى Δ، الزوايا المقابلة لأضلاع متطابقة تكون متطابقة.
4. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	4. الأضلاع المتقابلة فى ▱ تكون //.
5. $\angle 2 \cong \angle 3$, $\angle 1 \cong \angle 4$	5. الزوايا الداخلية المتبادلة $\angle$ للخطوط // تكون متطابقة.
6. $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$	6. الأشياء المطابقة لنفس الشىء تكون مطابقة لبعضها البعض.
7. $\overline{AC}$ ينصف $\angle A$، $\angle C$	7. التقسيم إلى جزئين متطابقين هو التنصيف.

الفصل السادس
الدوائر
Circles

فى هذا الفصل:

- ✔ علاقات الدائرة
- ✔ المماسات
- ✔ قياس الزوايا والأقواس فى الدائرة

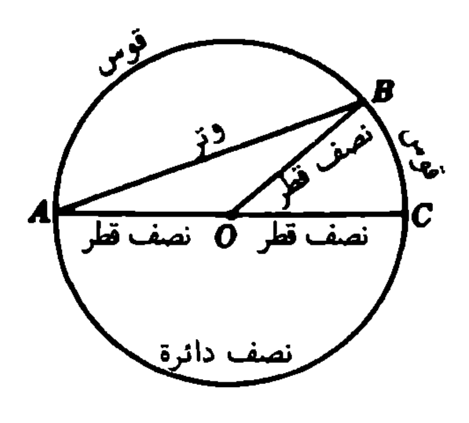
علاقات الدائرة Circle Relationships

المصطلحات التالية مرتبطة بالدائرة وعلى الرغم من أن بعضها تم تعريفه من قبل، سيتم إعادتهم هنا كمرجع.

الدائرة Circle هى مجموعة نقاط فى المستوى تبعد بعدًا ثابتًا عن مركز الدائرة Center.

محيط الدائرة Circumference هو المسافة حول الدائرة ويحتوى على 360°.

نصف قطر الدائرة Radius هو قطعة مستقيمة تصل مركز الدائرة بأى نقطة على الدائرة (انظر شكل 6-1).



شكل 6-1

من تعريف الدائرة ينتج أن أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.

الوتر Chord هو القطع المستقيم الذى يصل بين أى نقطتين على الدائرة.

القطر Diameter هو الوتر المار بمركز الدائرة؛ وهو أطول الأوتار وطوله ضعف طول نصف القطر.

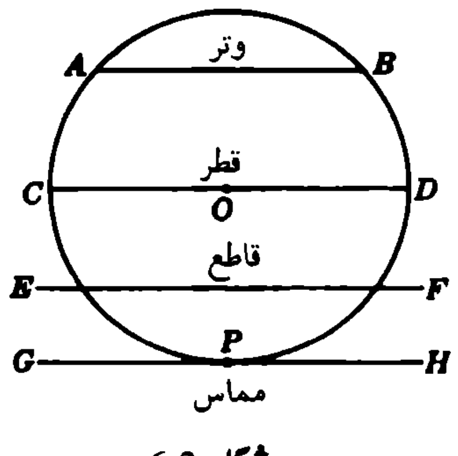
زاوية المركز Central Angle هى زاوية تتكون من نصفى قطر الدائرة.

القوس Arc هو جزء متصل من الدائرة. نصف الدائرة Semicircle هى قوس مقياسه نصف محيط الدائرة وبالتالى يحتوى على 180°.

القوس الثانوى Minor arc هو قوس أقل من نصف الدائرة. القوس الرئيسى Major Arc هو قوس أكبر من نصف الدائرة. إذن، فى الشكل 6-1، $\widehat{BC}$ هو قوس ثانوى و $\widehat{BAC}$ هو قوس رئيسى.

حصر Intercept القوس هو قطع هذا القوس. إذن، فى الشكل 6-1، $\angle BAC$ و $\angle BOC$ تحصران القوس $\widehat{BC}$.

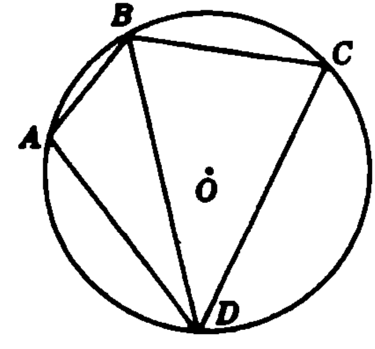
الوتر هو قطع مستقيم يصل بين نقطتين على المحيط. إذن، فى الشكل 6-2، $\overline{AB}$ وتر.



شكل 6-2

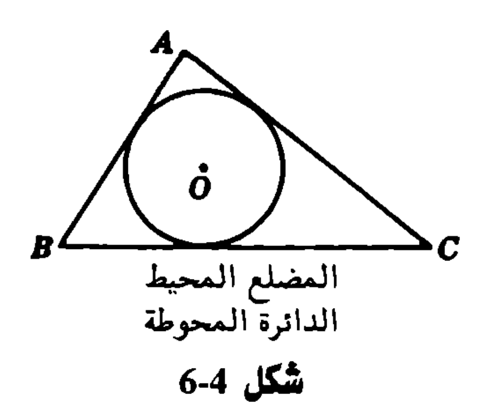
قطر الدائرة هو وتر يمر خلال مركز الدائرة. قـاطع الدائـرة Secant هو خط يتقاطع مع الدائرة فى نقطتين، المماس Tangent هو خط يمس الدائرة فى نقطة واحدة فقط بغض النظر عن بُعد هذه النقطة. إذن، فى الشكل 6-2، $\overline{CD}$ هـو قطر الدائرة O، $\overleftrightarrow{EF}$ هو قاطع الدائرة، $\overleftrightarrow{GH}$ هـو المماس للدائرة فى النقطة P. P هى نقطة الالتقاء أو نقطة التماس.

المضلع المحوط Inscribed Polygon هو مضلع كـل أضلاعـه أوتـار فى الدائرة. الدائرة المحيطة Circumscribed هى دائرة تمر بكل رأس فى المضلع. إذن، ΔABD، ΔBCD والشكل الربـاعى $ABCD$ هـى مضلعـات محوطة للدائرة O فى الشكل 6-3. الدائرة O هى دائـرة محيطـة للشكـل الرباعى $ABCD$.



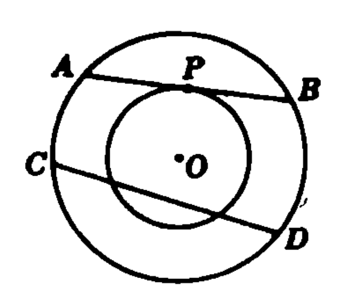
المضلع المحوط
الدائرة المحيطة
شكل 6-3

المضلع المحيط Circumscribed Polygon هو مضلع كل أضلاعه مماسات للدائرة. الدائرة المحوطة هى دائرة بحيث كل أضلاع المضلع مماسات لها. إذن، ΔABC هو مضلع محيط للدائرة O فى الشكل 6-4. الدائرة O هى دائرة محوطة بـ ΔABC.



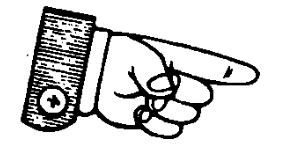
شكل 6-4

الدوائر متحدة المركز هى دوائر لها نفس المركز. إذن، الدائرتان الموضوعتان فى الشكل 6-5 هما دائرتان متحدتا المركز. $\overline{AB}$ هو مماس للدائرة الخارجية. $\overline{CD}$ هو قاطع للدائرة الداخلية ووتر للدائرة الخارجية.



شكل 6-5

الدائرتان تكونان متساويتان إذا كانت أطوال أنصاف أقطارهما متساوية؛ الدائرتان متطابقتان إذا كانت أنصاف أقطارهما متطابقة.



القوسان يكونان متطابقين إذا كان لهما قياس درجات وأطوال متساوية. ونستخدم الرمز $m\ \widehat{AC}$ للاستدلال على "قياس القوس AC".

قواعد الدائرة Circle Principles

قاعدة 1: القطر يقسم الدائرة إلى جزئين متساويين.

قاعدة 2: إذا قسم الوتر الدائرة إلى جزئين متساويين، إذن هو قطر للدائرة (هذه القاعدة مقلوب القاعدة 1).

قاعدة 3: النقطة تقع خارج الدائرة، على الدائرة أو داخل الدائرة طبقًا للمسافة بينها وبين المركز إذا كانت أكبر من أو تساوى أو أصغر من طول نصف القطر.

قاعدة 4: أنصاف أقطار نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة تكون متطابقة.

قاعدة 5: أقطار نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة تكون متطابقة.

قاعدة 6: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، زوايا المركز المتطابقة لها أقواس متطابقة.

قاعدة 7: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأقواس المتطابقة لها زوايا مركز متطابقة.

قاعدة 8: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأوتار المتطابقة لها أقواس متطابقة.

قاعدة 9: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأقواس المتطابقة لها أوتار متطابقة. (القاعدة 8 والقاعدة 9 هما مقلوبا بعضهما البعض).

قاعدة 10: القطر العمودى على وتر ينصف الوتر وأقواسه.

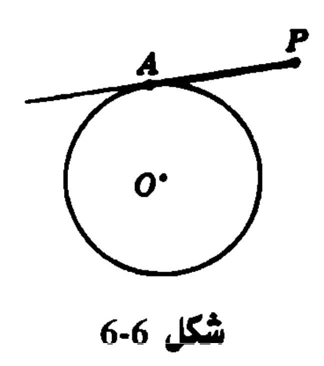
قاعدة 11: العمود المنصف لوتر يمر خلال مركز الدائرة.

قاعدة 12: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأوتار المتطابقة تقع على بُعدٍ متساوٍ من المركز.

قاعدة 13: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الأوتار التى تقع على بُعد متساوٍ من المراكز تكون متطابقة. (القاعدة 12 والقاعدة 13 هما مقلوبا بعضهما البعض.)

المماسات Tangents

طول المماس من نقطة إلى الدائرة هو طـول قطـع التمـاس مـن النقطـة المعلومة إلى نقطة التماس. إذن، *PA* هو طول الممــاس مـن النقطـة *P* إلى الدائرة *O* فى الشكل 6-6.



شكل 6-6

قواعد المماس Tangent Principles

قاعدة 1: المماس عمودى على نصف القطر المرسوم من نقطـة التلاقـى (التماس).

قاعدة 2: يكون الخط مماسًا للدائرة إذا كان عموديًا على نصف القطر عند نهايته الخارجية.

قاعدة 3: الخط يمر بمركز الدائرة إذا كان عموديًا على المماس عند نقطة التماس.

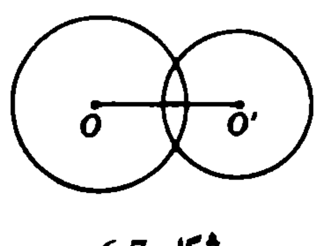
قاعدة 4: المماسات للدائرة من نقطة خارجية متطابقة.

قاعدة 5: القطع المار من مركز الدائرة إلى نقطة خارجية ينصف الزاوية بين المماسات من النقطة إلى الدائرة.

دائرتان فى أوضاع نسبية مختلفة

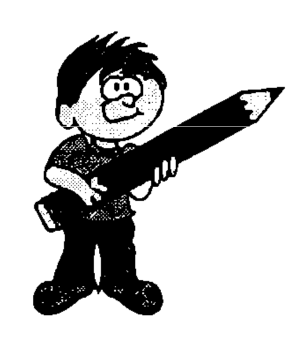
Two Circles in Varying Relative Positions

خط المركزين للدائرتين هو الخط الذى يصل بين مركزى الدائرتين.
إذن، $\overline{OO'}$ هو خط المركزين للدائرتين O و O' فى الشكل 6-7.

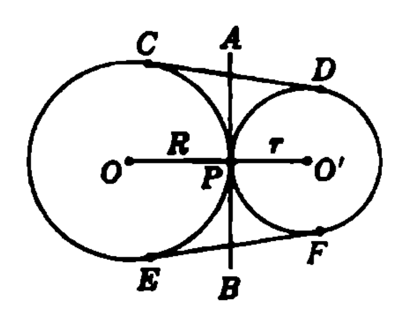


شكل 6-7

دائرتان متماستان من الخارج
Circles Tangent Externally



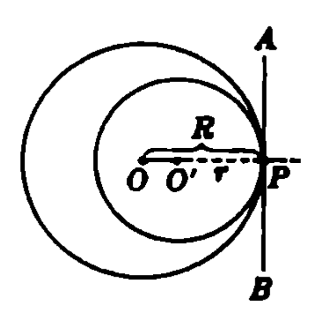
الدائرتان O و O' فى شكل 6-8 متماستان من الخارج عند النقطة P. $\overleftrightarrow{AB}$ هو المماس الداخلى المشترك لكلا الدائرتين. خط المركزين $\overline{OO'}$ يمر بالنقطة P وعمودى على $\overleftrightarrow{AB}$ وطوله يساوى مجموع أنصاف الأقطار $R + r$. كذلك، $\overleftrightarrow{AB}$ ينصف كل من المماسات الخارجية المشتركة $\overline{CD}$ و $\overline{EF}$.



شكل 6-8

دائرتان متماستان من الداخل Circles Tangent Internally

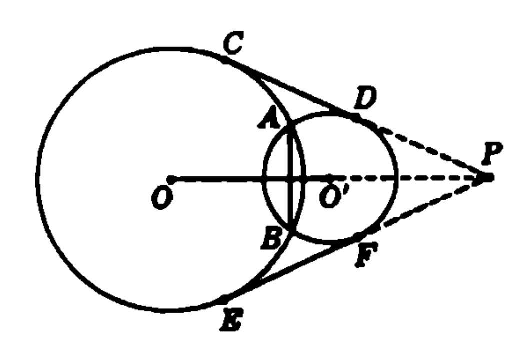
الدائرتان O و O' فى الشكل 6-9 متماستان من الداخل عند النقطة P. $\overleftrightarrow{AB}$ هو المماس الخارجى المشترك لكلا الدائرتيـن. خـط المركزيـن $\overline{OO'}$ إذا تم امتداده يمر بالنقطة P ويكون عموديًا على $\overleftrightarrow{AB}$ وطـوله يساوى فرق أنصاف الأقطار $R - r$.



شكل 6-9

دائرتان متداخلتان Overlapping Circles

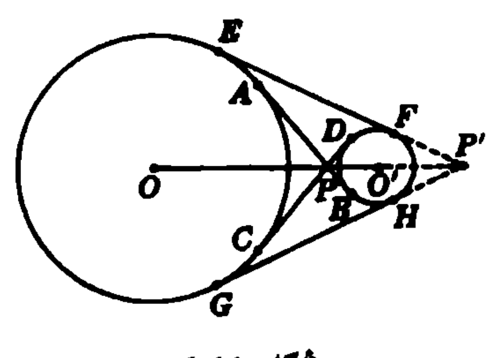
الدائرتان O و O' فـى الشكـل 6-10 متداخلتـان. الوتـر المشـترك هـو $\overline{AB}$. إذا كـانت الدائرتـان غـير متسـاويتين، المماسـان الخارجيـان المشتركان (المتساويان) $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{EF}$ يتلاقيان عند P. خط المركزين $\overline{OO'}$ هو العمود المنصف للوتر $\overline{AB}$ وإذا تم امتداده يمر خلال النقطة P.



شكل 6-10

الدوائر المتباعدة (خارج بعضها البعض) Circles Outside Each Other

الدائرتان O و O' فى الشكل 6-11 يقعان كليًا خارج بعضهما البعض. المماسان الداخليان المشتركان $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ يتلاقيان عند P. إذا كانت الدائرتان غير متساويتين، المماسان الخارجيان المشتركان $\overline{EF}$ و $\overline{GH}$، إذا تم امتدادهما يتلاقيان عند P'. خط المركزين $\overline{OO'}$ يمر خلال P و P'. كذلك، $\overline{AB} = \overline{CD}$ و $\overline{EF} = \overline{GH}$.

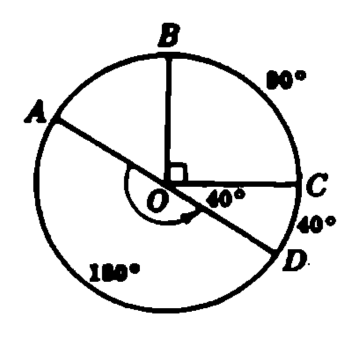


شكل 6-11

قياس الزوايا والأقواس فى الدائرة

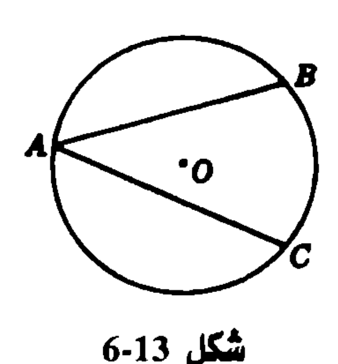
Measurements of Angles and Arcs in a Circle

زاوية المركز Central Angle لها نفس عدد الدرجات مثل القوس الذى تنحصر بداخله. إذن، فى الشكل 6-12، زاوية المركز القائمة تنحصر داخل قوس 90°، زاوية المركز التى قياسها 40° تنحصر داخل قوس 40°، و زاوية المركز التى تمثل زاوية مستقيمة تنحصر داخل نصف دائرة قياسها 180°.



شكل 6-12

الزاوية المحوطة Inscribed Angle هى الزاوية التى رأسها تقـع علـى الدائرة وأضلاعها أوتار فى الدائـرة. الزاويـة المحوطـة فـى قـوس رأسها تقع على القوس وأضلاعها تمر خلال نهايات القوس. إذن $\angle A$ تحصر $\widehat{BC}$ ومحوطة فى $\widehat{BAC}$.



شكل 6-13

قاعدة 1: الزاوية المركزية تقاس بقوسها المنحصر.

قاعدة 2: الزاوية المحوطة تقاس بنصف قوسها المنحصر.

قاعدة 3: فـى نفـس الدائـرة أو الدوائـر المتطابقـة، الزوايـا المحوطـة المتطابقة لها أقواس منحصرة متطابقة.

قاعدة 4: فى نفس الدائرة أو الدوائر المتطابقة، الزوايا المحوطة التـى لها أقواس منحصرة متطابقة تكون متطابقة.

قاعدة 5: الزوايا المحوطة فى نفس القوس أو الأقواس المتطابقة تكون متطابقة.

قاعدة 6: الزاوية المحوطة فى نصف دائرة هى زاوية قائمة.

قاعدة 7: الزوايـا المتقابلـة فـى الشكـل الربـاعى المحـوط هـى زوايـا متكاملة.

قاعدة 8: الخطوط المتوازية تحصر أقواسًا متطابقة على الدائرة.

قاعدة 9: الزاوية المتكونة من مماس ووتر تقاس بنصف القوس المنحصر.

قاعدة 10: الزاوية المتكونة من وترين متقاطعين تقاس بنصف مجموع الأقواس المنحصرة.

قاعدة 11: الزاوية المتكونة من قاطعين متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين الأقواس المنحصرة.

قاعدة 12: الزاوية المتكونة من مماس وقاطع متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين الأقواس المنحصرة.

قاعدة 13: الزاوية المتكونة من مماسين متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين الأقواس المنحصرة.

جدول قواعد قياس الزاوية

Table of Angle-Measurement Principles

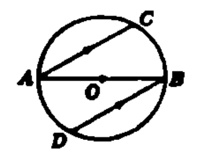
موضع الرأس	نوع الزاوية	الشكل	صيغة القياس	وسيلة القياس
مركز الدائرة	زاوية المركز (تطبيق القاعدة 1)	O A B a°	$\angle O \doteq AB$ $m\angle O = a^\circ$	عن طريق القوس المنحصر
على الدائرة	زاوية محوطة (تطبيق القاعدة 2)	A B C a°	$\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$ $m\angle A = \frac{1}{2}a^\circ$	عن طريق نصف القوس المنحصر
	زاوية متكونة من مماس ووتر (تطبيق القاعدة 9)	A B C a°		

داخل الدائرة	زاوية متكونة من وترين متقاطعين (تطبيق القاعدة 10)		$\angle 1 \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC}+\widehat{BD})$ $m\angle 1 = \frac{1}{2}(a^\circ + b^\circ)$	عن طريق نصف مجموع الأقواس المنحصرة
خارج الدائرة	زاوية متكون من قاطعين (تطبيق القاعدة 11)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BC}-\widehat{DE})$ $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ - b^\circ)$	عن طريق نصف فرق الأقواس المنحصرة
	زاوية متكونة من قاطع ومماس (تطبيق القاعدة 12)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BC}-\widehat{BD})$ $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ - b^\circ)$	
	زاوية متكونة من مماسين (تطبيق القاعدة 13)		$\angle A \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BDC}-\widehat{BC})$ $m\angle A = \frac{1}{2}(a^\circ - b^\circ)$ Also, $m\angle A = (180 - b)^\circ$	

مسألة محلولة 6-1. أثبت أن الأوتار المتوازية المرسومة من نهايتى القطر متساوية فى الطول.

Solved Problem 6-1. Prove that parallel chords drawn at the ends of a diameter are equal in length.

الحل



المعطيات: الدائرة O

القطر $\overline{AB}$

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

إثبات أن: $AC = BD$

الخطة: إثبات أن $\widehat{AC} = \widehat{BD}$

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. $\overline{AB}$ قطر	1. معطى.
2. $\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}$	2. القطر يقطع الدائرة إلى نصفى دائرة متساويين.
3. $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$	3. معطى.
4. $\widehat{AD} \cong \widehat{BC}$	4. الخطوط المتوازية تحصر أقواسًا ≅ على الدائرة.
5. $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$	5. إذا طرحت متساويات من متساويات، الفروق تكون متساوية. تعريف الأقواس الـ ≅.
6. $AC = BD$	6. فى الدوائر، الأقواس المتساوية لها أوتار متساوية فى الطول.

الفصل السابع
التماثل
Similarity

فى هذا الفصل:

- ✔ **النسب**
- ✔ **التناسب**
- ✔ **القطع المتناسبة**
- ✔ **المثلثات المتماثلة**
- ✔ **المتناسب الوسط فى المثلث القائم**
- ✔ **نظرية فيثاغورس**
- ✔ **مثلثات قائمة خاصة**

النسب Ratios

النسب تستخدم لمقارنة الكميات عن طريق القسمة: النسبة بين كميتين هى الأولى مقسومة على الثانية. النسبة هى عدد مجرد بمعنى أنها رقم بـدون وحدة قياس إذن، نسبة 10 ft إلى 5 ft هى 10 ft ÷ 5ft التى تساوى 2.

النسب يمكن التعبير عنها بالطرق التالية:

1. باستخدام علامة الترقيم، كما فى 3:4.

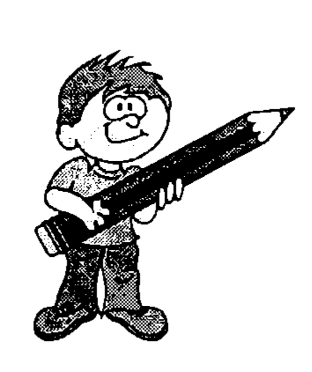
2. باستخدام إلى (to) كما فى 3 إلى 4 (3 to 4).
3. ككسر اعتيادى، كما فى $\frac{3}{4}$.
4. كرقم عشرى، 0.75.
5. كنسبة مئوية، 75%.

الكميات المشتملة عليها النسبة يجب أن يكون لها نفس الوحدة. النسبة يجب تبسيطها عن طريق اختزالها إلى أقل حد وحذف الكسور. إذن، لإيجاد النسبة 1 ft إلى 4 in. أولاً نغير القدم (foot) إلى 12 بوصة (inches) ، ثم نأخذ نسبة 12 inches إلى 4 inches؛ النتيجة هى النسبة 3 إلى 1 (3 to 1) أو 3. أيضًا نسبة $2\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$ يجب إعادة صياغتها إلى 5:1أو 5.

النسبة بين ثلاث كميات أو أكثر يمكن التعبير عنها بالنسبة المتصلة Continued Ratio. إذن، النسبة $2 إلى $3 إلى $5 (2$ to 3$ to 5$) هى النسبة المتصلة 2:3:5. هذه النسبة المطلقة مركبة من ثلاث نسب منفصلة هى 2:3، 3:5، و 2:5.

التناسب Proportions

التناسب هو تساوى نسبتين. إذن 4:10 = 2:5 (أو $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$) تعتبر تناسب.



الحد الرابع للتناسب هو التناسب الرابع للثلاثة الآخرين مأخوذين بترتيبهم. إذن، فى 2:3 = 4:x، x هى التناسب الرابع للأعداد 2، 3، و4.

أوساط Means التناسب هى الحدود الوسطى بمعنى، الحد الثانى والثالث. أطراف Extremes التناسب هى الحدود الخارجية بمعنى، الحد الأول والرابع. إذن، فى $a:b = c:d$، الأوساط هى c و b والأطراف هى a و d.

قواعد التناسب Proportion Principles

قاعدة 1: فى أى تناسب، حاصل ضرب الأوساط يساوى حصل ضرب الأطراف.

قاعدة 2: إذا كان حاصل ضرب رقمين يساوى حاصل ضرب رقمين آخرين، أى زوج يمكن اعتباره أوساط التناسب والزوج الآخر أطراف التناسب.

وسائل تغيير التناسب إلى التناسب المساوى

Methods of Changing a Proportion Into an Equivalent Proportion

قاعدة 3: (وسيلة الإقلاب) التناسب يمكن تغييره إلى التناسب المساوى عن طريق قلب كل نسبة.

قاعدة 4: (وسيلة التناوب) التناسب يمكن تغييره إلى تناسب مساوٍ عن طريق تبديل الأوساط أو تبديل الأطراف.

قاعدة 5: (وسيلة الجمع) التناسب يمكن تغييره إلى تناسب مساوٍ عن طريق جمع الحدود فى كل نسبة للحصول على حد أول وثالث جديدين.

قاعدة 6: (وسيلة الطرح) التناسب يمكن تغييره إلى تناسب مساوٍ عن طريق طرح الحدود فى كل نسبة للحصول على حد أول وثالث جديدين.

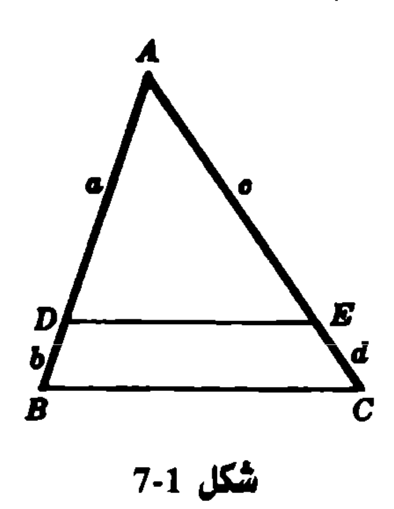
قواعد تناسب أخرى Other Proportion Principles

قاعدة 7: إذا تساوت ثلاثة حدود فى تناسب مع الحدود المناظرة لها فى تناسب آخر، باقى الحدود تكون متساوية.

قاعدة 8: فى متتالية النسب المتساوية، مجموع أى بسط إلى مجموع المقام المناظر مثل أى بسط إلى مقامه.

القطع المتناسبة Proportional Segments

إذا تم تقسيم قطعين بالتناسب (1) القطع الجديدة المتناظرة تكون متناسبة، و(2) القطعين الأصليين وأى زوج من القطعين الجديدين المتناظرين يكونوا متناسبين. إذن، إذا كان $\overline{AC}$ و $\overline{CD}$ فى الشكل 7-1 مقسومين بالتناسب بالقطعة $\overline{DE}$، يمكن كتابة تناسب مثل $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باستخدام الأربع قطع، أو يمكن كتابة تناسب مثل $\frac{a}{AB}=\frac{c}{AC}$ باستخدام القطعين الأصليين واثنان من قطعهم الجديدة.

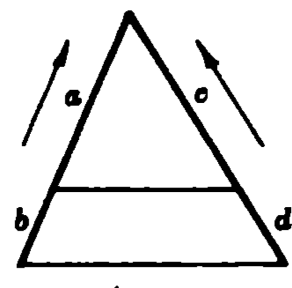


شكل 7-1

إيجاد الثمان منظومات لأى تناسب

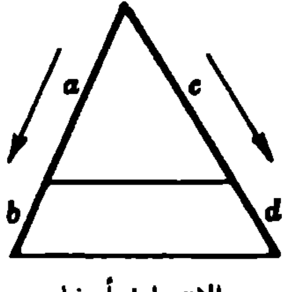
Obtaining the Eight Arrangements of any Proportion

تناسب مثل $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يمكن تنظيمه بثمان طرق. لإيجاد الثمان اختلافات فإننا نجعل كل حد من حدود التناسب يمثل واحد من القطع الجديدة فى الشكل 7-1. اثنان من التناسبات الممكنة تم إيجادها من كل اتجاه، كما هو تالٍ.



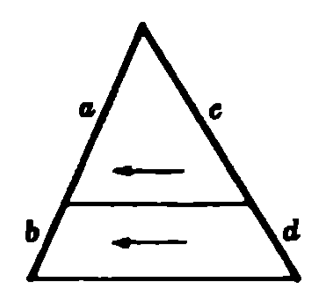
الاتجاه: أعلى

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ or $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$



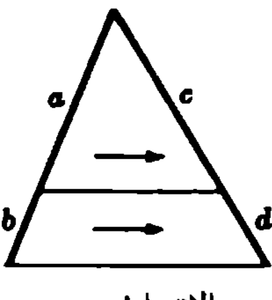
الاتجاه: أسفل

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ or $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$



الاتجاه: يسار

$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ or $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$



الاتجاه: يمين

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ or $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$

قواعد تناسب القطع Principles of Proportional Segments

قاعدة 1: إذا كان الخط موازى لأحد أضلاع المثلث. إذن، فهو يقسم الضلعين الآخرين بالتناسب.

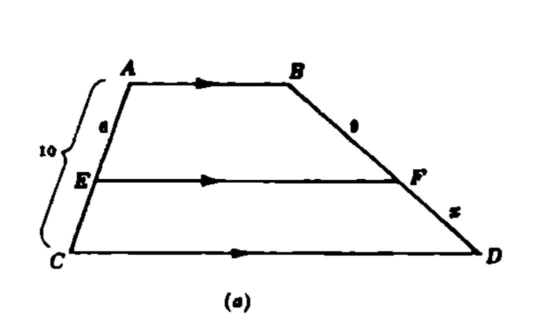
قاعدة 2: إذا كان الخط يقسم ضلعين من أضلاع المثلث بالتناسب، فهو موازٍ للضلع الثالث (القاعدة 1 والقاعدة 2 هما مقلوب بعضهما البعض).

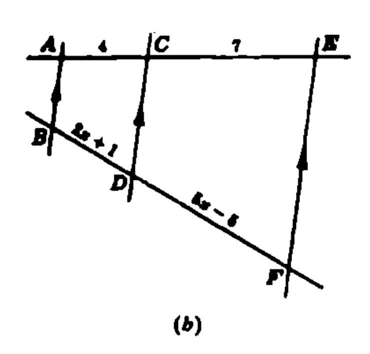
قاعدة 3: ثلاثة خطوط متوازية أو أكثر يقطعوا أى خطين مستعرضين بالتناسب.

قاعدة 4: منصف زاوية المثلث يقسم الأضلاع المتقابلة إلى قطع تتناسب مع الأضلاع المتجاورة.

مسألة محلولة 7-1. أوجد x فى كل جزء فى الشكل 7-2.

Solved Problem 7-1. Find x in each part of Fig. 7-2.





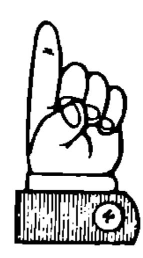
شكل 7-2

(a) لدينا $EC = 4$ و $\overline{AB} \,//\, \overline{EF} \,//\, \overline{CD}$ ؛ إذن $\frac{x}{9} = \frac{4}{6}$ و $x = 6$.

(b) $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$ ؛ إذن $\frac{5x-5}{2x+1} = \frac{7}{4}$ ، ومنها $20x - 20 = 14x + 7$.

إذن $6x = 27$ و $x = 4\frac{1}{2}$.

المثلثات المتماثلة Similar Triangles



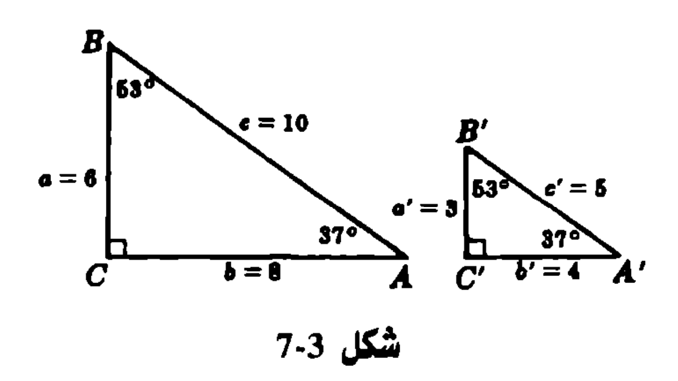
المضلعات المتماثلة Similar Polygons هى مضلعات زواياها المتناظرة متطابقة وأضلاعها المتناظرة متناسبة. المضلعات المتماثلة لـها نفـس الشكـل علـى الرغـم مـن أنـه ليـس بالضرورة أن يكون لها نفس الحجم .

رمز "التماثل" هو ~ . كما فى حالة المثلثات المتطابقة، الأضلاع المتناظرة فى المثلثات المتماثلة تقابل زوايا متطابقة.

فى الشكل 7-3، $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ لأن

$$m\angle A = m\angle A' = 37^\circ \; m\angle B = m\angle B' = 53^\circ \; m\angle C = m\angle C' = 90^\circ$$

$$\text{و} \quad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \quad \text{أو} \quad \frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$$



شكل 7-3

قواعد المثلثات المتماثلة Principles of Similar Triangles

قاعدة 1: الزوايا المتنــاظرة للمثلثـات المتماثلـة تكـون متطابقـة (مـن التعريف).

قاعدة 2: الأضلاع المتناظرة للمثلثات المتماثلـة تكـون متناسـبة (مـن التعريف).

قاعدة 3: يكون المثلثان متماثلين إذا كانت زاويتـان لمثلـث تطابقـان على التوالى زاويتين فى المثل الآخر.

قاعدة 4: يكون المثلثان متماثلين إذا كانت زاوية فـى أحـد المثلثيـن تطابق زاوية فى المثلث الآخر والأضلاع التى تحـوى هـاتين الزاويتين فى تناسب مع بعضها البعض.

قاعدة 5: يكون المثلثان متماثلين إذا كـانت أضلاعـهما المتنـاظرة متناسبة.

قاعدة 6: يكون المثلثان القائمان متماثلين إذا كـانت الزاويـة الحـادة لأحدهما مطابقة للزاوية الحادة فـى المثلـث الآخـر (نتيجـة للقاعدة 3).

قاعدة 7: الخط الموازى لأحد أضلاع المثلث يقطع مثلث متماثل مـع المثلث المعطى.

قاعدة 8: المثلثات المماثلة لنفس المثلث تكون مماثلة لبعضها البعض.

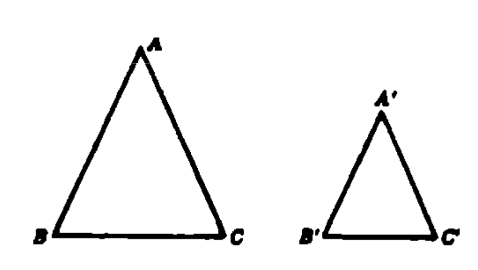
قاعدة 9: الارتفاع إلى وتر المثلث القائم يقسم المثلث القائم إلى مثلثين مماثلين للمثلث المعطى ولبعضهما البعض.

قاعدة 10: المثلثات تكون متماثلة إذا كانت أضلاعها على التوالى موازية لبعضها البعض.

قاعدة 11: المثلثات تكون متماثلة إذا كانت أضلاعها على التوالى متعامدة على بعضها البعض.

مسألة محلولة 7-2. أثبت أن مثلثين متساويى الساقين متماثلان إذا كانت زاوية القاعدة لأحدهما تطابق زاوية القاعدة للمثلث الآخر.

Solved Problem 7-2. Prove that two isosceles triangles are similar if a base angle of one is congruent to a base angle of the other.



المعطيات: المثلث المتساوى الساقين

$\Delta ABC\ (AB = AC)$

المثلث المتساوى الساقين

$\Delta A'B'C'\ (A'B' = A'C')$

$\angle B \cong \angle B'$

إثبات أن: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

الخطة: إثبات أن $\angle C \cong \angle C'$ واستخدام القاعدة 3.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. $\angle B \cong \angle B'$	1. معطى.
2. $\angle B \cong \angle C,\ \angle B' \cong \angle C'$.	2. زوايا القاعدة للمثلث المتساوى الساقين متطابقة.
3. $\angle C \cong \angle C'$.	3. الأشياء ≅ لأشياء، تكون ≅ لبعضها البعض.
4. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.	4. المثلثان يكونان متماثلين إذا كانت زاويتان لمثلث تطابقان زاويتين لمثلث آخر.

المتناسب الوسط فى المثلث القائم

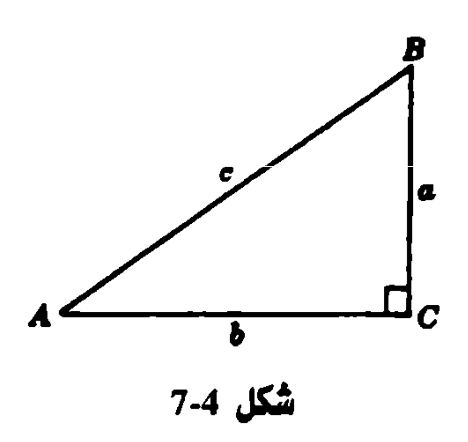
Mean Proportionals in a Right Triangle

قاعدة 1: طول الارتفاع إلى الوتر للمثلث القائم هو المتناسب الوسط بين أطوال قطع الوتر.

قاعدة 2: فى المثلث القائم، طول أى من الساقين هو المتناسب الوسط بين طول الوتر وطول إسقاط هذه الساق على الوتر.

نظرية فيثاغورس — Pythagorean Theorem

فى المثلث القائم، مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعات أطوال ساقى المثلث. إذن، فى الشكل 4-7، $c^2 = a^2 + b^2$.



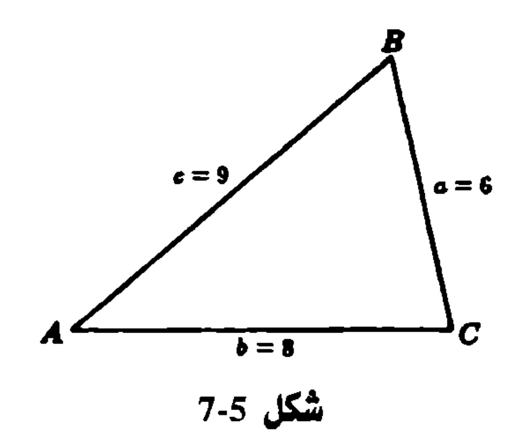
شكل 4-7

اختبارات للمثلثات القائمة، الحادة، والمنفرجة

Tests for Right, Acute, and Obtuse Triangles

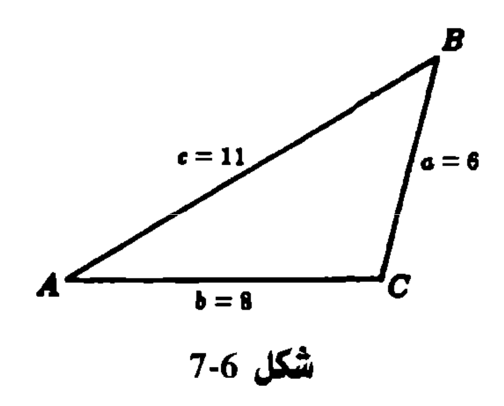
إذا كان $c^2 = a^2 + b^2$ تنطبق على الثلاثة أضلاع للمثلث، إذن، المثلث قائم، لكن إذا كانت $c^2 \neq a^2 + b^2$، إذن المثلث ليس قائم الزاوية.

فى ΔABC، إذا كانت $c^2 < a^2 + b^2$ حيث c هو أطول ضلع فى المثلث، إذن المثلث حاد. إذن، في الشكل 5-7، $9^2 < 6^2 + 8^2$ (بمعنى $81 < 100$). إذن، ΔABC مثلث حاد.



شكل 7-5

فى ΔABC، إذا كانت $c^2 > a^2 + b^2$ حيث c هو أطول ضلع فى المثلث، إذن المثلث منفرج. إذن، فى الشكل 7-6، $11^2 > 6^2 + 8^2$ (بمعنى $121 > 100$)؛ إذن، ΔABC مثلث منفرج.



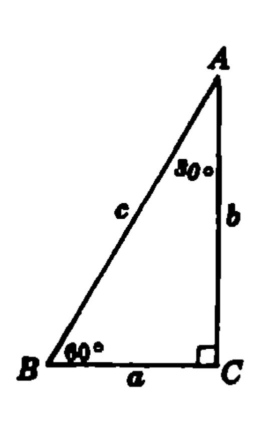
شكل 7-6

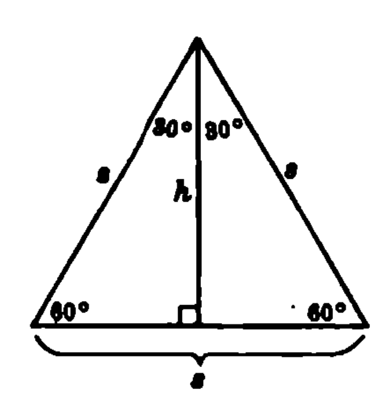
مثلثات قائمة خاصة Special Right Triangles

المثلث 30°-60°-90° The 30°-60°-90° Triangle

المثلث 30°-60°-90° هو نصف مثلث متساوى الأضلاع. إذن، فى المثلث القائم ABC (شكل 7-7) $a = \frac{1}{2}c$. افرض أن $c = 2$؛ إذن $a = 1$. ونظرية فيثاغورس تعطى $b^2 = c^2 - a^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ أو $b = \sqrt{3}$.

وبالتالى نسبة الأضلاع تكون $a: b: c = 1: \sqrt{3} : 2$.





شكل 7-7

قواعد المثلث 30°-60°-90° Principles of the 30°-60°-90° Triangle

قاعدة 1: طول الساق المقابلة للزاوية 30° يساوى نصف طول الوتر.

قاعدة 2: طول الساق المقابلة للزاوية 60° يساوى نصف طول الوتر مضروبًا فى الجذر التربيعى للرقم 3.

قاعدة 3: طول الساق المقابلة للزاوية 60° يساوى طول الساق المقابلة للزاوية 30° مضروبًا فى الجذر التربيعى للرقم 3.

قاعدة 4: طول الارتفاع للمثلث المتساوى الأضلاع يساوى نصف طول الضلع مضروبًا فى الجذر التربيعى للرقم 3 (القاعدة 4 هى نتيجة للقاعدة 2).

قواعد المثلث 45°-45°-90° Principles of the 45°-45°-90° Triangle

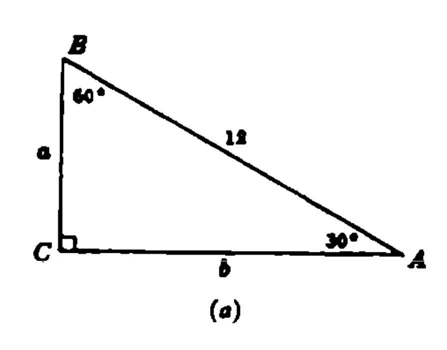
قاعدة 5: طول الساق المقابلة لزاوية 45° يساوى نصف طول الوتر مضروبًا فى الجذر التربيعى للرقم 2.

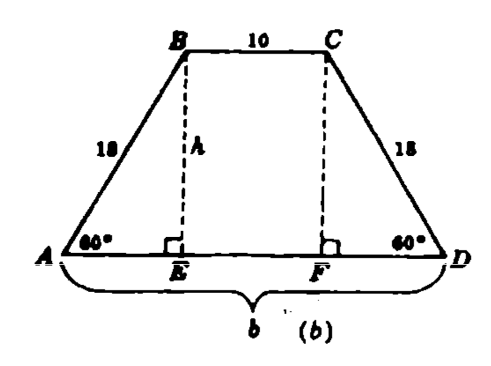
قاعدة 6: طول الوتر يساوى طول الضلع مضروبًا فى الجذر التربيعى للرقم 2.

قاعدة 7: فى مربع، طول الخط القطرى يساوى طول الضلع مضروبًا فى الجذر التربيعى للرقم 2.

مسألة محلولة 7-3 (a) إذا كان طول الوتر لمثلـث °30-°60-°90 يسـاوى 12. أوجد أطوال ساقيه [شكل (a) 7-8]. (b) كل سـاق لشبـه منحرف متساوى الساقين تساوى 18. إذا كانت زوايا القاعدة تساوى °60 والقاعدة العليا تساوى 10. أوجد أطوال كلٍ من الارتفاع والقاعدة السفلى [شكل (b) 7-8].

Solved Problem 7-3. (a) If the length of the hypotenuse of a 30°-60°-90° triangle is 12, find the lengths of its legs [Fig. 7-8(a)]. (b) Each leg of an isosceles trapezoid has length 18. If the base angles are 60° and the upper base is 10, find the lengths of the altitude and the lower base [Fig. 7-8(b)].





شكل 7-8

الحل

(a) من قاعدة 1، $a = \frac{1}{2}(12) = 6$. من قاعدة 2، $b = \frac{1}{2}(12)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

(b) من قاعدة 2، $h = \frac{1}{2}(18)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

من قاعدة 1، $\overline{AE} = \overline{FD} = \frac{1}{2}(18) = 9$ ؛ إذن $b = 9 + 10 + 9 = 28$.

الفصل الثامن
المساحات
Areas

في هذا الفصل:

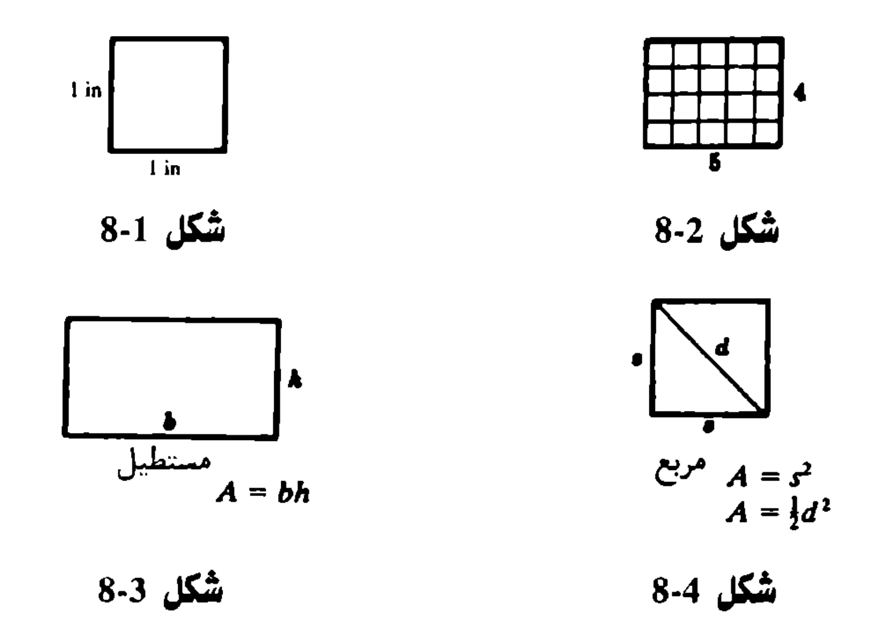
- ✓ مساحة المستطيل والمربع
- ✓ مساحة متوازى الأضلاع
- ✓ مساحة المثلث
- ✓ مساحة شبه المنحرف
- ✓ مساحة المعين
- ✓ مضلعات لها نفس الحجم أو الشكل

مساحة المستطيل والمربع
Area of a Rectangle and of a Square

وحدة المربع هى السطح المنغلق بمربع ضلعه يساوى وحدة واحدة (شكل 8-1). مساحة شكل مستوى مغلق مثل المضلع هى عدد وحدات المربع التى يحتويها السطح. بما أن المستطيل الذى له 5 وحدات طول و4 وحدات عرض يمكن تقسيمه إلى 20 وحدة مربع، تكون مساحته هى 20 وحدة مربع (شكل 8-2).

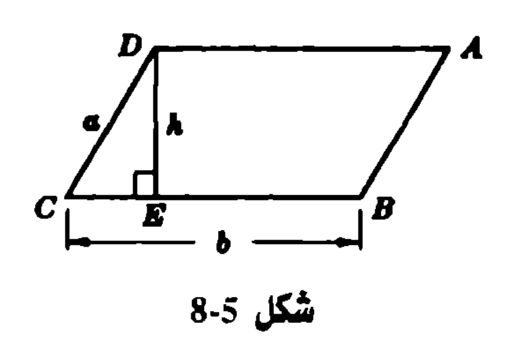
مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب طول قاعدته فى طول ارتفاعه (شكل 8-3).

مساحة المربع تساوى مربع طول أحد أضلاعه (شكل 8-4).



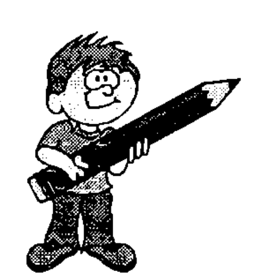
مساحة متوازى الأضلاع Area of a Parallelogram

مساحة متوازى الأضلاع تساوى حاصل ضرب طول أحد الأضلاع فى طول الارتفاع لهذا الضلع. إذن، فى $\square ABCD$ (شكل 8-5) إذا كانت $b = 10$ و $h = 2.7$، إذن $A = 10(2.7) = 27$.

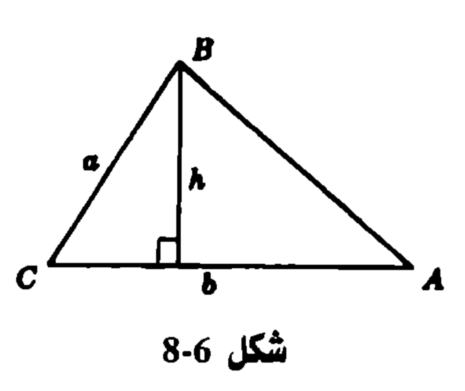


شكل 8-5

مساحة المثلث Area of a Triangle



مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب طول أحد الأضلاع فى طول الارتفاع لهذا الضلع كما هو موضح فى الشكل 8-6.

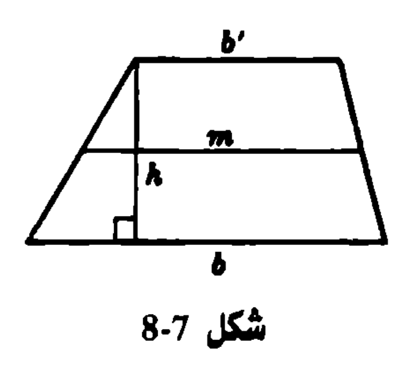


شكل 8-6

مساحة شبه المنحرف Area of a Trapezoid

مساحة شبه المنحرف تساوى نصف حاصل ضرب طول الارتفاع فى مجموع أطوال قاعدتيه. إذن، إذا كان $h = 20$، $b = 27$، و $b' = 23$ فى الشكل 8-7، إذن، $A = \frac{1}{2}(20)\ (27 + 23) = 500$.

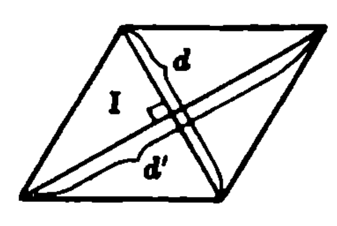
مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب طول الارتفاع فى طول القاعدة المتوسطة.



شكل 8-7

مساحة المعين
Area of a Rhombus

مساحة المعين تساوى نصف حاصل ضرب أطوال خطوطه القطرية. بما أن كل خط قطرى هو عمود منصف للآخر، مساحة المثلث I فى الشكل 8-8 هى $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d\right)\left(\frac{1}{2}d'\right)=\frac{1}{8}dd'$. إذن، المعين المكون من أربعة مثلثات مطابقة للمثلث ΔI، له مساحة تساوى $4\left(\frac{1}{8}dd'\right)$ أو $\frac{1}{2}dd'$.

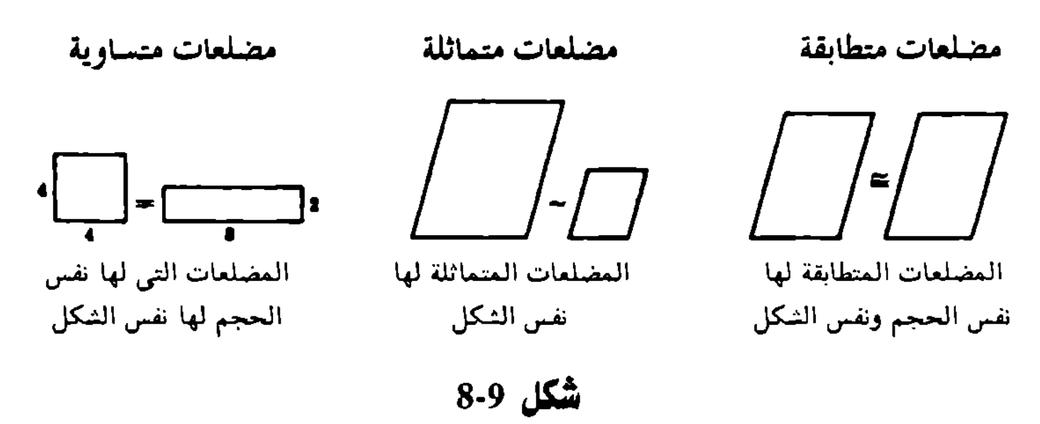


معين: $A = \frac{1}{2}dd'$

شكل 8-8

مضلعات لها نفس الحجم أو الشكل
Polygons of the Same Size or Shape

شكل 8-9 يوضح ما نقصده عندما نقول إن المضلعين لهما نفس المساحة أو متماثلان أو متطابقان



شكل 8-9

قاعدة 1: متوازيات الأضلاع لها نفس المساحة إذا كان لها قواعد متطابقة وارتفاعات متطابقة.

قاعدة 2: المثلثات لها نفس المساحة إذا كان لها قواعد متطابقة وارتفاعات متطابقة.

قاعدة 3: المستقيم المتوسط يقسم المثلث إلى مثلثين لهما نفس المساحة.

قاعدة 4: المثلثات يكون لها نفس المساحة إذا كان لها قاعدة مشتركة ورؤوسها تقع على خط موازٍ للقاعدة.

مسألة محلولة 8-1 أثبت أن M هي نقطة تنصيف الخط القطرى $\overline{AC}$ فى الشكل الرباعى $ABCD$، و $\overline{BM}$ و $\overline{DM}$ مرسومان، فإن مساحة الشكل الرباعى $ABMD$ تساوى مساحة الشكل الرباعى $CBMD$.

Solved Problem 8-1. Prove that if M is the midpoint of diagonal $\overline{AC}$ in quadrilateral $ABCD$, and $\overline{BM}$ and $\overline{DM}$ are drawn, then the area of quadrilateral $ABMD$ equals the area of quadrilateral $CBMD$.

الحل

B C M A D

المعطيات: الشكل الرباعى $ABCD$

M هى نقطة تنصيف الخط القطرى $\overline{AC}$.

إثبات أن: مساحة الشكل الرباعى $ABMD$ تساوى مساحة الشكل الرباعى $CBMD$.

الخطة: استخدام القاعدة 3 للحصول على زوجين من المثلثات لهما نفس المساحة، ثم استخدام مبدأ الجمع.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. M هى نقطة تنصيف $\overline{AC}$.	1. معطى.
2. $\overline{BM}$ مستقيم متوسط لـ ΔACB. $\overline{DM}$ مستقيم متوسط لـ ΔACD.	2. الخط من رأس المثلث إلى نقطة المنتصف للضلع المقابل هو مستقيم متوسط.
3. مساحة (ΔAMB) = مساحة (ΔBMC). مساحة (ΔAMD) = مساحة (ΔDMC).	3. المستقيم المتوسط يقسم المثلث إلى مثلثين متساويين فى المساحة.
4. مساحة الشكل الرباعى $ABMD$ تساوى مساحة الشكل الرباعى $CBMD$.	4. إذا جُمعت المتساويات على مستويات، النواتج تكون متساوية.

الفصل التاسع
المضلعات المنتظمة والدائرة
Regular Polygons and the Circle

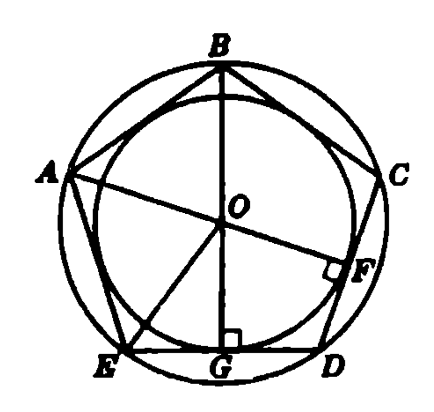
فى هذا الفصل:

- ✓ **المضلعات المنتظمة**
- ✓ **علاقات القطع المستقيمة فى المضلعات المنتظمة المكونة من 3، 4 و6 أضلاع**
- ✓ **مساحة المضلع المنتظم**
- ✓ **نسب القطع والمساحات للمضلعات المنتظمة**
- ✓ **محيط ومساحة الدائرة**
- ✓ **طول القوس؛ مساحة القطاع الدائرى والقطع الدائرى**
- ✓ **مساحات أشكال مركبة**

المضلعات المنتظمة — Regular Polygons

المضلع المنتظم هو مضلع متساوى الأضلاع ومتساوى الزوايا. مركز المضلع هو المركز المشترك لدائرتيه المحوطة والمحيطة. نصف قطر المضلع المنتظم هو أيضًا نصف قطر الدائرة المحيطة. الزاوية المركزية للمضلع المنتظم هى زاوية محصورة بين نصفى قطر مرسومين إلى

رأسين متواليين. نصف قطر الدائرة المحوطه للمضلع المنتظم (Apothem) هو قطع مستقيم من المركز عمودى على أحد الأضلاع.



شكل 9-1

فى الخماسى المنتظم فى الشكل 9-1، $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}$ و $m\angle A=m\angle B=m\angle C=m\angle D=m\angle E$. أيضًا، مركزه هو O، $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ هما أنصاف أقطاره؛ $\angle AOB$ هى زاوية مركزية؛ و $\overline{OG}$ و $\overline{OF}$ هما أنصاف أقطار المحوطة للمضلع المنتظم.

قواعد المضلع المنتظم Regular-Polygon Principles

قاعدة 1: إذا كان المضلع مكون من n ضلع، وطول ضلعه s، فإن المحيط هو $p=ns$.

قاعدة 2: الدائرة يمكن أن تحيط بأى مضلع منتظم.

قاعدة 3: الدائرة يمكن أن تحوط بأى مضلع منتظم.

قاعدة 4: مركز الدائرة المحيطة بالمضلع المنتظم هو أيضًا مركز الدائرة المحوطة.

قاعدة 5: المضلع المتساوى الأضلاع المحوط فى دائرة هو مضلع منتظم.

قاعدة 6: أنصاف أقطار المضلع المنتظم متطابقة.

قاعدة 7: نصف قطر المضلع المنتظم ينصف الزاوية المرسوم إليها.

إذن، فى الشكل 9-1، $\overline{OB}$ ينصف $\angle ABC$.

قاعدة 8: أنصاف أقطار الدائرة المحوطة فى المضلع المنتظم متطابقة.

قاعدة 9: أنصاف أقطار الدائرة المحوطة فى المضلع المنتظم تنصف الضلع المرسومة إليه.

إذن فى الشكل 9-1، $\overline{OF}$ ينصف $\overline{CD}$، و $\overline{OG}$ ينصف $\overline{ED}$.

قاعدة 10: للمضلع المنتظم المكون من n ضلع:

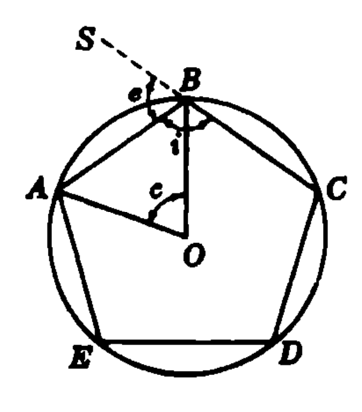
1. كل زاوية مركز c قياسها $\frac{360°}{n}$.
2. كل زاوية داخلية i قياسها $\frac{(n-2)180°}{n}$.
3. كل زاوية خارجية e قياسها $\frac{360°}{n}$.

إذن للخماسى المنتظم $ABCDE$ فى الشكل 9-2،

$$m\angle AOB = m\angle ABS = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{5} = 72°$$

$$m\angle ABC = \frac{(n-2)180°}{n} = \frac{(5-2)180°}{5} = 108°$$

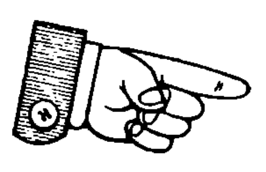
و $m\angle ABC + m\angle ABS = 180°$



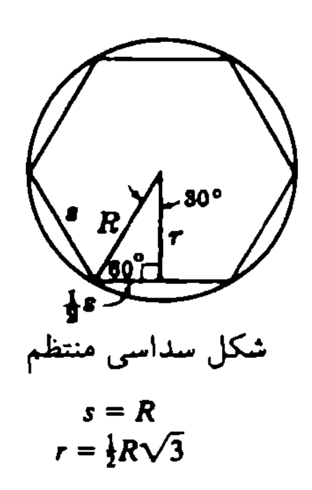
شكل 9-2

علاقات القطع المستقيمة فى المضلعات المنتظمة المكونة من 3، 4 و6 أضلاع

Relationships of Segments in Regular Polygons of 3, 4, and 6 Sides

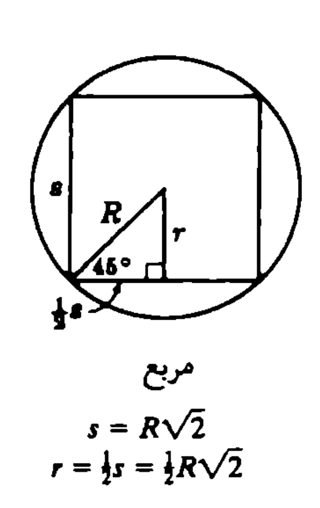


فى الشكل السداسى المنتظم، المربع، المثلث المتساوى الأضلاع، تتكون مثلثات قائمة خاصة عندما يرسم نصف قطر الدائرة المحوطة للمضلع المنتظم r ونصف قطر R ينتهيان عند نفس الضلع. فى حالة المربع، فإننا نحصل على مثلث 45°-45°-90°، بينما فى الحالتين الأخريتين، فإننا نحصل على مثلث 30°-60°-90°. الصيغ فى الشكل 3-9 تربط أطوال أضلاع وأنصاف أقطار هذه المضلعات المنتظمة.



شكل سداسى منتظم

$s = R$
$r = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$



مربع

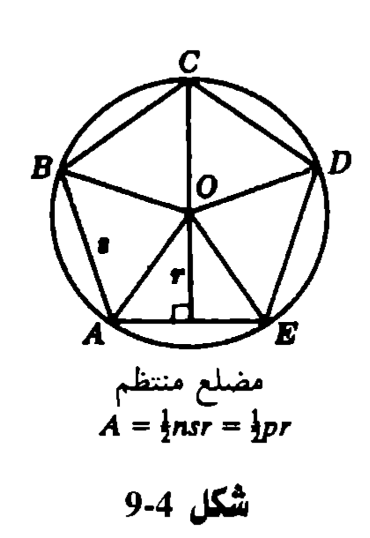
$s = R\sqrt{2}$
$r = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$

شكل 3-9

مساحة المضلع المنتظم Area of a Regular Polygon

مساحة المضلع المنتظم تساوى نصف حاصل ضرب المحيط فى طول نصف قطر الدائرة المحوطة للمضلع المنتظم كما هو موضح فى الشكل 4-9،

عن طريق رسم أنصاف الأقطار، يمكننا تقسيم المضلع المنتظم المكون من n ضلع ومحيطه $p = ns$ إلى n مثلث، كل له مساحة $\frac{1}{2}rs$. إذن، مساحة المضلع المنتظم هى $\frac{1}{2}pr = \frac{1}{2}nsr = n\left(\frac{1}{2}rs\right)$.



مضلع منتظم
$A = \frac{1}{2}nsr = \frac{1}{2}pr$

شكل 9-4

نسب القطع والمساحات للمضلعات المنتظمة

Ratios of Segments and Areas of Regular Polygons

قاعدة 1: المضلعات المنتظمة التى لها نفس عدد الأضلاع متماثلة.

قاعدة 2: القطع المتناظرة للمضلعات المنتظمة التى لها نفس عدد الأضلاع تكون متناسبة. "القطع" هنا تشتمل على الأضلاع، المحيطات، أنصاف الأقطار، أو محيطى الدائرة المحيطة أو المحوطة، وهكذا.

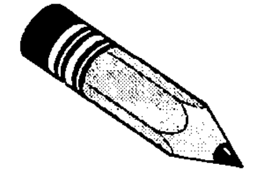
قاعدة 3: مساحات المضلعات المنتظمة التى لها نفس عدد الأضلاع يكونون لبعضهم مثل مربع أطوال أى قطعين متناظرين.

محيط ومساحة الدائرة

Circumference and Area of a Circle

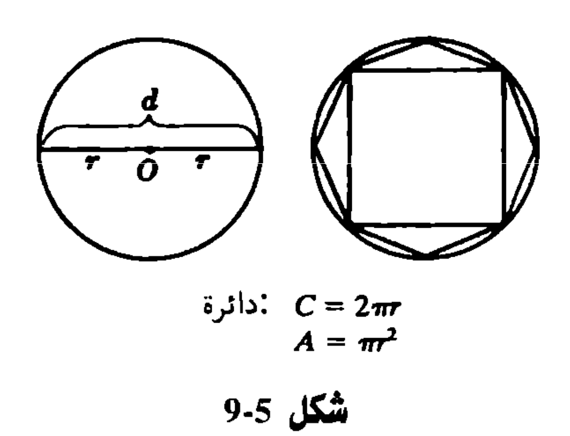
π (pi) هى نسبة المحيط C لأى دائرة قطرها d؛ هكذا $\pi = C/d$. إذن،

$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$



القيمة التقريبية لـ r هى 3.14.

الدائرة يمكن النظر إليها كمضلع منتظم له عدد لا نهائى من الأضلاع. إذا كان مربع محوط بدائرة وتم مضاعفة عدد الأضلاع باستمرار (لتكوين مثمن، 16-gon، وهكذا)، محيطات المضلعات الناتجة ستقترب أكثر وأكثر من محيط الدائرة (شكل 5-9).



دائرة: $C = 2\pi r$
$A = \pi r^2$

شكل 5-9

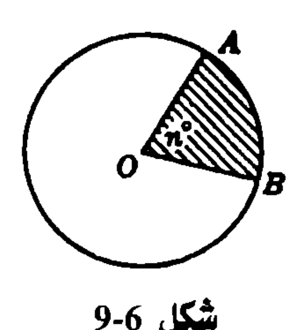
لإيجاد مساحة الدائرة، الصيغة $A = \frac{1}{2}\pi r$ يمكنك استخدامها بالتعويض بالقيمة C مكان p؛ بعمل ذلك نحصل على $A = \frac{1}{2}Cr = \frac{1}{2}(2\pi r)(r) = \pi r^2$.

كل الدوائر أشكال متماثلة حيث أنها لها نفس الشكل. ولأنها أشكال متماثلة، (1) القطع المتناظرة فى الدوائر تتناسب و(2) مساحتى دائرتين يمثلان لبعضهما كمربع أنصاف أقطارهما أو محيطهما.

طول القوس؛ مساحة القطاع الدائرى والقطع الدائرى

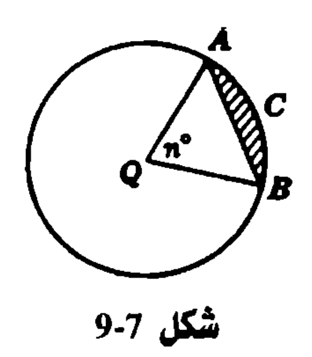
Length of an Arc; Area of a Sector and a Segment

القطاع الدائرى هو جزء من دائرة محددة بنصفى قطر وقوسهم المنحصر. إذن، فى الشكل 9-6، الجزء المظلل من الدائرة O هو القطاع الدائرى OAB.



شكل 9-6

القطع الدائرى هو جزء من دائرة محدد بوتر وقوسه. القطع الثانوى للدائرة هو الأصغر من القطعين المتكونين. إذن، فى الشكل 9-7، الجزء المظلل للدائرة Q هو القطع الثانوى للقوس $\widehat{ACB}$.



شكل 9-7

قاعدة 1: لدائرة نصف قطرها r، الطول l لقوس قياسه $n°$ يساوى $\frac{n}{360}$ من محيط الدائرة، أو $l = \frac{n}{360} 2\pi r = \frac{\pi n r}{180}$.

قاعدة 2: لدائرة نصف قطرها r، المساحة K لقطاع قياسه $n°$ تساوى $\frac{n}{360}$ من مساحة الدائرة أو $K = \frac{n}{360} \pi r^2$.

قاعدة 3: $\frac{\text{مساحة قطاع من } n^\circ}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{طول قوس قياسه } n^\circ}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{n}{360}$

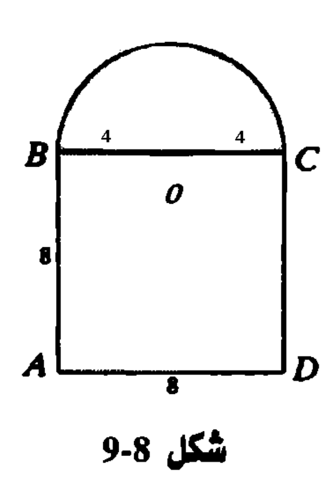
قاعدة 4: مساحة القطع الثانوى لدائرة يساوى مساحة القطاع ناقص مساحة المثلث المتكون من أنصاف الأقطار والوتر.

قاعدة 5: إذا كان المضلع المنتظم محوط فى دائرة، كل قطع يتكون من الضلع له مساحة تساوى الفرق بين مساحة الدائرة ومساحة المضلع مقسومة على عدد الأضلاع.

مساحات أشكال مركبة Areas of Combination Figures

مساحات أشكال مركبة مثل التى فى الشكل 9-8 يمكن إيجادها عن طريق معرفة المساحات المستقلة ثم الجمع أو الطرح كما يتطلب الأمر. إذن، المساحة المظللة فى الشكل تساوى مجموع مساحات المربع ونصف الدائرة:

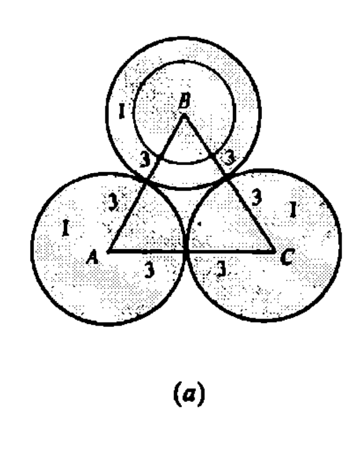
$$A = 8^2 + \frac{1}{2}(16\pi) = 64 + 8\pi$$



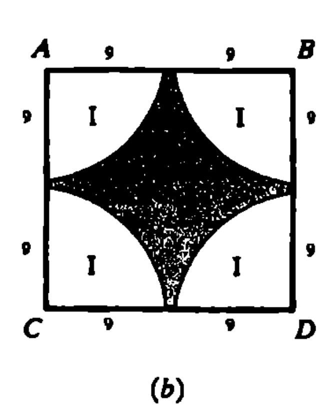
شكل 9-8

مسألة محلولة 9-1: أوجد المساحة المظللة فى كل جزء من الشكل 9-9.
فى (a) الدوائر A و B وC متماسة من الخارج وكل منها له نصف قطر 3. فى (b) كل قوس هو جزء من دائرة نصف قطرها 9.

Solved Problem 9-1: Find the shaded area in each part of Fig. 9-9. In (a), circles A, B, and C are tangent externally and each has a radius 3. In (b), each arc is part of a circle of radius 9.



(a)



(b)

شكل 9-9

الحل:

(a) مساحة ΔABC =

$$\frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(6^2)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

مساحة القطاع I =

$$\frac{n^o}{360^o}(\pi r^2) = \frac{300}{360}(9\pi) = \frac{15}{2}\pi$$

المساحة المظللة =

$$9\sqrt{3} + 3\left(\frac{15}{2}\pi\right) = 9\sqrt{3} + \frac{45}{2}\pi$$

(b) مساحة المربع = $18^2 = 324$

مساحة القطاع I =

$$\text{I} = \frac{n^o}{360^o}(\pi r^2) = \frac{90}{360}(81\pi) = \frac{81}{4}\pi$$

المساحة المظللة =

$$324 - 4\left(\frac{81}{4}\pi\right) = 324 - 81\pi$$

الفصل العاشر
إنشـاءات
Constructions

فى هذا الفصل:

- ✔ **قطع وزوايا متطابقة**
- ✔ **إنشاء المنصفات والأعمدة**
- ✔ **إنشاء مثلث**
- ✔ **إنشاء خطوط متوازية**
- ✔ **إنشاءات الدائرة**
- ✔ **الإحاطة الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم**
- ✔ **إنشاء مثلثات متماثلة**

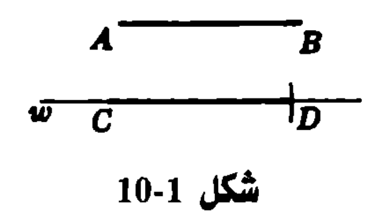
قطع وزوايا متطابقة Duplicating Segments and Angles

إنشاء 1: لإنشاء قطعة مستقيمة مطابقة لقطعة مستقيمة معلومة.

معطى: القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ (شكل 1-10).

إنشاء: قطعة مستقيمة مطابقة للقطعة $\overline{AB}$.

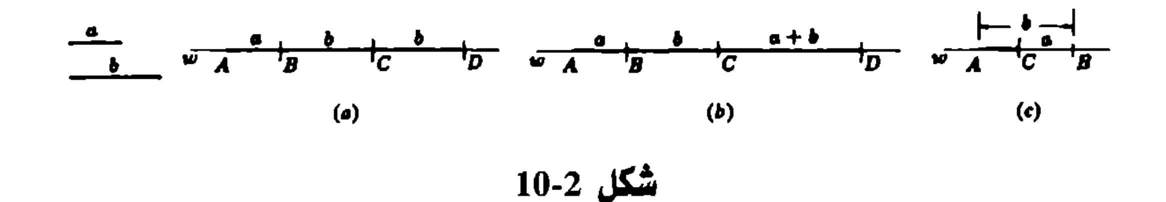
الإنشاء: على خط عمل w، باستخدام أى نقطة C كمركز ونصف قطر يساوى $\overline{AB}$، أنشئ قوسًا يقطع w فى D. إذن $\overline{CD}$ هى القطعة المستقيمة المطلوبة.



شكل 10-1

مسألة محلولة 10-1: معطى قطع مستقيمة بـأطوال a و b (شكل 10-2)، أنشئ قطعًا مستقيمة بأطوال تساوى (a) $a + 2b$؛ (b) $2(a + b)$؛ و(c) $b - a$.

Solved Problem 10-1: Given line segments with lengths a and b (Fig. 10-2), construct line segments with lengths equal to (a) $a + 2b$; (b) $2(a + b)$; and (c) $b - a$.



شكل 10-2

الحل: باستخدام الإنشاء 1

(a) على خط عمل w، أنشئ قطعة مستقيمة $\overline{AB}$ طولها a. من B، أنشئ قطعة مستقيمة طولها يساوى b، إلى النقطة C؛ من النقطة C، أنشئ قطعة مستقيمة طولها b، إلى النقطة D، إذن $\overline{AD}$ هى القطعة المستقيمة المطلوبة.

(b) كما فى (a)، $AD = a + b + (a + b)$.

(c) كما فى (a)، أولاً أنشئ $\overline{AB}$ بطول b، ثم $\overline{BC}$ بطول a. $AC = b - a$.

إنشاء 2: لإنشاء زاوية مطابقة لزاوية معلومة.

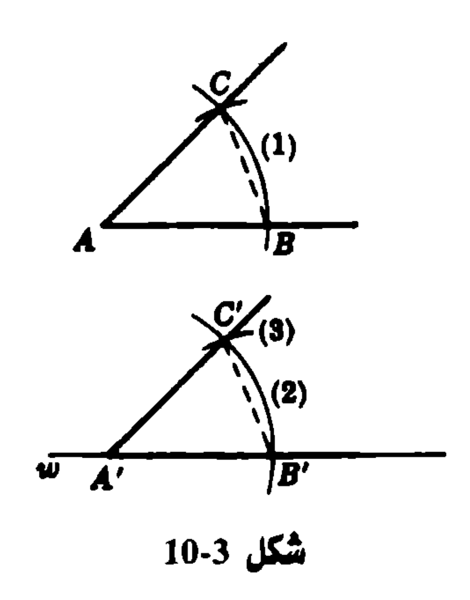
معطى: $\angle A$ (شكل 10-3).

لإنشاء: زاوية مطابقة للزاوية $\angle A$.

الإنشاء: باستخدام A كمركز ونصف قطر ملائم، أنشئ قوسًا.

(1) يقطع أضلاع $\angle A$ فى B و C. باستخدام A'، النقطة الواقعة على

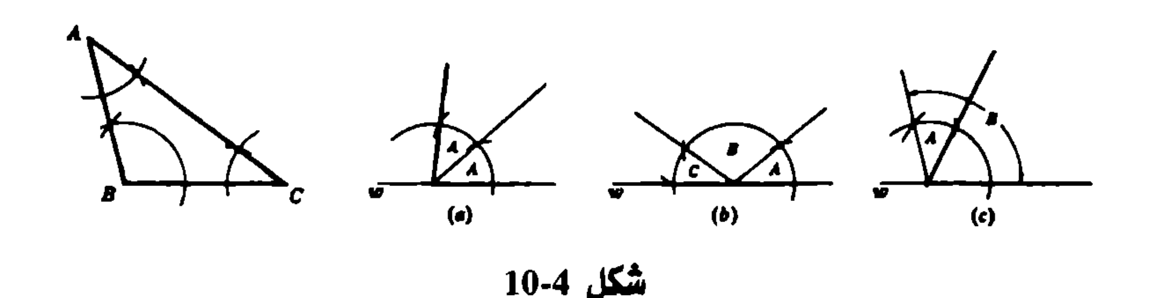
خط العمل w كمركز وبنفس نصف القطر، أنشئ القوس (2) الذى يقطع w فى B'. باستخدام B' كمركز ونصف قطر يساوى $\overline{BC}$، أنشئ القوس (3) الذى يقطع القوس (2) فى C'. ارسم $\overline{A'C'}$. إذن $\angle A'$ هى الزاوية المطلوبة. ($\Delta ABC \cong \Delta ADC$ عن طريق s.s.s ≅ s.s.s؛ إذن $\angle 2 \cong \angle 1$)



شكل 10-3

مسألة محلولة 10-2: معطى ΔABC فى الشكل 10-4، أنشئ زوايا قياسها يساوى (a) $2A$، (b) $A + B + C$؛ و (c) $B - A$.

Solved Problem 10-2: Given $\triangle ABC$ in Fig. 10-4, construct angles whose measures are equal to (a) $2A$; (b) $A + B + C$; and (c) $B - A$.



شكل 10-4

الحل: باستخدام الإنشاء 2:

(a) باستخدام خط العمل w كضلع، طابق $\angle A$. أنشئ نسخة مطابقة

أخرى للزاويــة $\angle A$ مجـاورة لــ $\angle A$، كمـا هـو موضـح. الأضـلاع الخارجية للزوايا المنسوخة تُكوِّن الزاوية المطلوبة.

(b) باسـتخدام خـط العمـل w كضلـع طـابق $\angle A$. أنشـئ $\angle B$ مجـاورة للزاوية $\angle A$ ثم أنشئ $\angle C$ مجاورة للزاويــة $\angle B$. الأضلاع الخارجيـة للزوايا المنسوخة A و C يُكوِّنوا الزاوية المطلوبة. لاحظ أن الزاوية هي زاوية مستقيمة.

(c) باستخدام خط العمل w كضلع $\angle B$، ثم طابق $\angle A$ من الضلع الجديد لـ $\angle B$ كما هو موضح. الفرق هو الزاوية المطلوبة.

إنشاء المنصفات والأعمدة

Constructing Bisectors and Perpendiculars

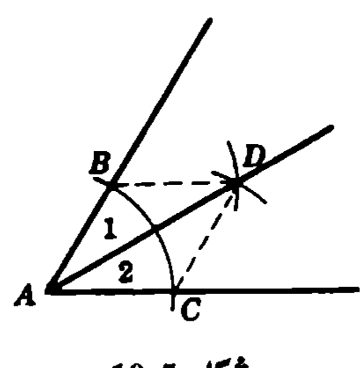
إنشاء 3: لتنصيف زاوية معلومة.

معطى: $\angle A$ (شكل 5-10).

لإنشاء: منصف $\angle A$.

الإنشاء: باستخدام A كمركز وبنصف قطر ملائم، أنشئ قوس يقطع أضلاع $\angle A$ في B و C. باستخدام B و C كمراكـز وأنصـاف أقطـار متسـاوية. أنشئ أقواسًا تتقاطع في D. ارسم $\overrightarrow{AD}$. إذن $\overrightarrow{AD}$ هو المنصف المطلوب.

($\Delta ABD \cong \Delta ADC$ عن طريق $s.s.s \cong s.s.s$؛ إذن $\angle 1 \cong \angle 2$)



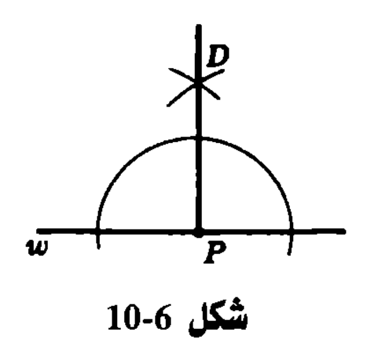
شكل 5-10

إنشاء 4: لإنشاء خط عمودى على خط معلوم خلال نقطة معلومة على الخط.

معطى: الخط w والنقطة P على w (شكل 10-6).

لإنشاء: عمودى على w عند P.

الإنشاء: باستخدام الإنشاء 3، نصف الزاوية المستقيمة عند P. إذن $\overrightarrow{DP}$ هو العمود المطلوب؛ $\overleftrightarrow{DP}$ هو الخط المطلوب.



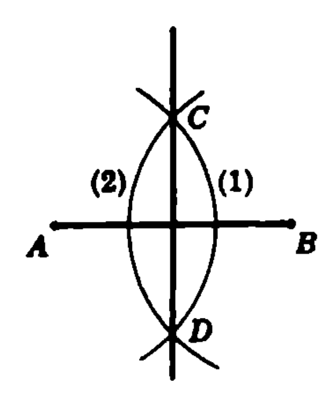
شكل 10-6

إنشاء 5: لتنصيف قطع مستقيم معلوم (لإنشاء عمود منصف لقطع مستقيم معلوم).

معطى: القطع المستقيم $\overline{AB}$ (شكل 10-7).

لإنشاء: العمود المنصف للقطع $\overline{AB}$.

الإنشاء: باستخدام A كمركز وبنصف قطر أكبر من نصف $\overline{AB}$، أنشئ القوس (1) باستخدام B كمركز ونفس نصف القطر، أنشئ القوس (2) يقطع



شكل 10-7

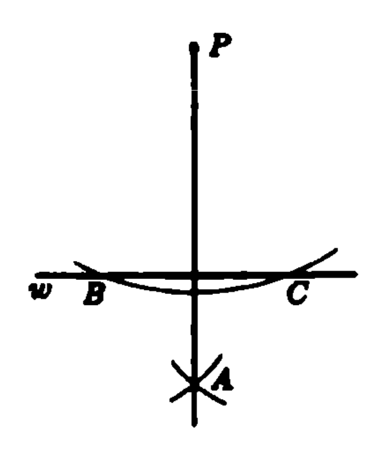
القوس (1) فى C و D. ارسم $\overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{CD}$ هو العمود المنصف للقطع $\overline{AB}$ المطلوب. (نقطتان على بُعدٍ متساوٍ من نهايتى القطع، يُعرفان العمود المنصف للقطع).

إنشاء 6: لإنشاء خط عمودى على خط معلوم خلال نقطة خارجية معلومة.

معطى: الخط w والنقطة P خارج w (شكل 8-10).

لإنشاء: عمود على w خلال P.

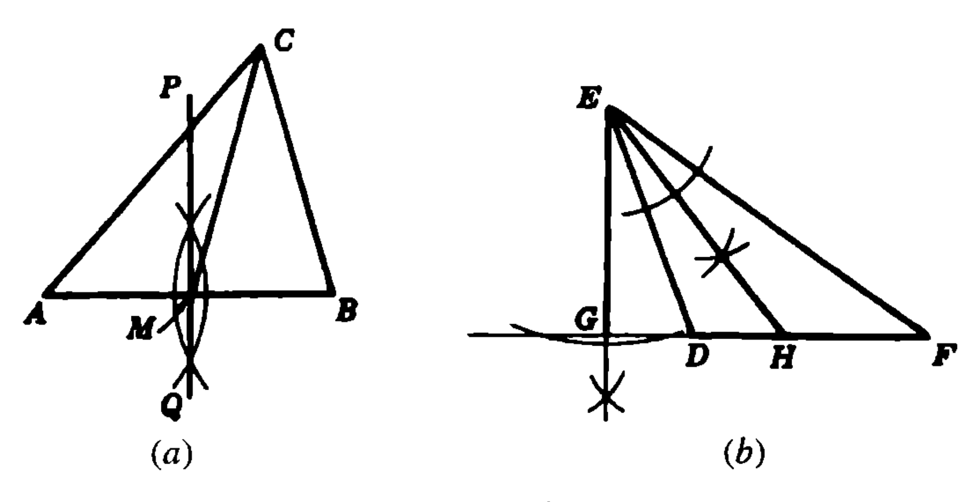
الإنشاء باستخدام P كمركز ونصف قطر طوله كافى، أنشئ قوسًا يقطع w فى B و C. باستخدام B و C كمراكز وأنصاف أقطار متساوية وطولها أكبر من نصف $\overline{BC}$. أنشئ أقواسًا تتقاطع فى A. ارسم $\overleftrightarrow{PA}$. إذن $\overleftrightarrow{PA}$ هو العمود المطلوب. (كل من النقاط P و A على بُعدٍ متساوٍ من B و C).



شكل 8-10

مسألة محلولة 3-10: فى المثلث غير المتساوى الأضلاع ΔABC [شكل 9-10 (a)]، أنشئ (a) عمود منصف للقطع $\overline{AB}$ و (b) المستقيم المتوسط للقطع $\overline{AB}$. فى ΔDEF [شكل 9-10 (b)]، D زاوية منفرجة؛ أنشئ (c) الارتفاع $\overline{DF}$ و (d) منصف الزاوية E $(\angle E)$.

Solved Problem 10-3: In scalene $\triangle ABC$ [Fig. 10-9(a)], construct (a) a perpendicular bisector of $\overline{AB}$ and (b) a median to $\overline{AB}$. In $\triangle DEF$ [Fig. 10-9(b)], D is an obtuse angle; construct (c) the altitude to $\overline{DF}$ and (d) the bisector of $\angle E$.



شكل 10-9

الحل:

(a) نستخدم الإنشاء 5 لإيجاد $\overleftrightarrow{PQ}$ ، العمود المنصف للقطع $\overline{AB}$.

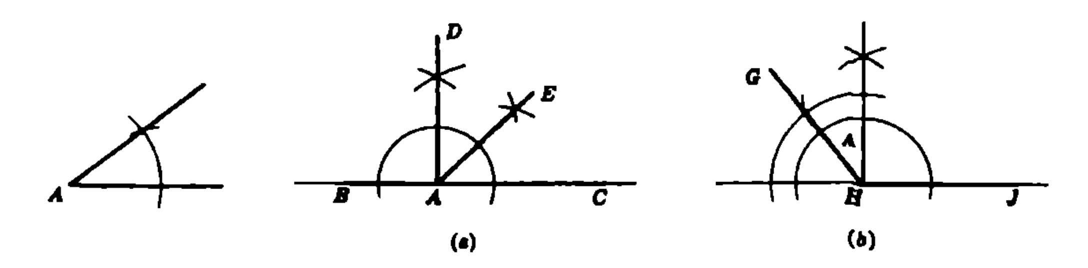
(b) النقطة M تنصف $\overline{AB}$. ارسم $\overline{CM}$ ، المستقيم المتوسط للقطع $\overline{AB}$.

(c) نستخدم الإنشاء 6 لإيجاد $\overline{EG}$ ، الارتفاع إلى $\overline{DF}$ (ممتد).

(d) نستخدم الإنشاء 3 لإيجاد $\angle E$. $\overrightarrow{EH}$ هو المنصف المطلوب.

مسألة محلولة 10-4: (a) أنشئ زوايا قياسها °90، °45 و°135. (b) معطى زاوية قياسها A (شكل 10-10)، أنشئ زاوية قياسها A + °90.

Solved Problem 10-4: (a) Construct angles measuring 90°, 45°, and 135°. (b) Given an angle with measure A (Fig. 10-10), construct an angle whose measure is $90° + A$.



شكل 10-10

الحل:

(a) فى الشكل (a) 10-10، $m\angle DAB = 90°$، $m\angle CAE = 45°$، $m\angle BAE = 135°$.

(b) فى الشكل (b) 10-10، $m\angle GHJ = 90° + A$.

إنشاء مثلث Constructing a Triangle

تحديد المثلث Determining a Triangle

يتم تحديد المثلث عندما تهئ مجموعة المعلومات المعطاة حجمه وشكله. بما أن الأجزاء المطلوب لإثبات تطابق المثلثات تهئ شكل وحجم المثلث، فإن المثلث يمكن تحديده عندما تكون المعلومات (المعطيات) تتكون من ثلاثة أضلاع، أو ضلعين والزاوية المحصورة بين هذين الضلعين، أو زاويتين وضلع محصور بين هاتين الزاويتين، أو زاويتين وضلع غير محصور بين هاتين الزاويتين، أو الوتر وأى من ساقى المثلث القائم.

رسم تخطيط للمثلثات المطلوب إنشاؤها

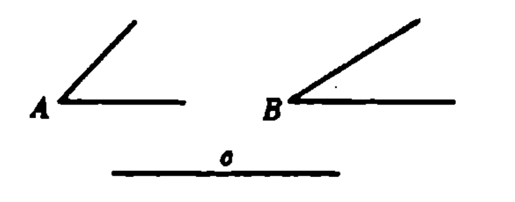
Sketching Triangles to be Constructed

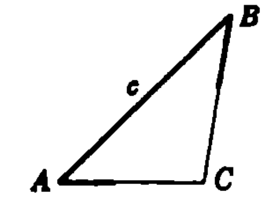
قبل عمل الإنشاء الفعلى، فإنه من المساعد عمل رسم تخطيطى تمهيدى للمثلث المطلوب. فى هذا الرسم التخطيطى:

1. نظهر موضع كل من الأجزاء المعلومة للمثلث.
2. نرسم الأجزاء المعلومة بخط ثقيل، الأجزاء المتبقية بخط خفيف.
3. نقرب أحجام الأجزاء المعلومة.

4. نستخدم حروف صغيرة للأضلاع لتتوافق مع الحروف الكبيرة للزوايا المقابلة لهم.

كمثال، يمكنك عمل رسم تخطيطى مثل الذى فى الشكل 11-10 قبل إنشاء المثلث بمعلومية زاويتين والضلع المحصور بينهما.





شكل 11-10

إنشاءات المثلث Triangle Constructions

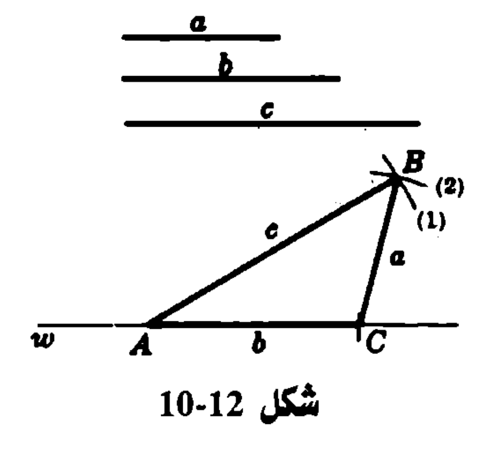
إنشاء 7: لإنشاء مثلث بمعلومية أضلاعه الثلاثة.

معطى: أضلاع طولها a، b و c (شكل 12-10).

لإنشاء: ΔABC.

الإنشاء: على خط العمل w، أنشئ $\overline{AC}$ بحيث $AC = b$. باستخدام A كمركز و c كنصف قطر، أنشئ القوس (1). ثم باستخدام C كمركز و a كنصف قطر، أنشئ القوس (2) بحيث يقطع القوس (1) فى B. ارسم $\overline{BC}$ و $\overline{AB}$.

ΔABC هو المثلث المطلوب.



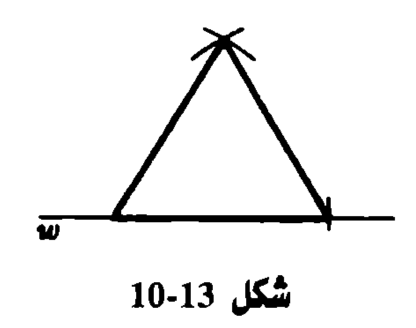
شكل 12-10

إنشاء 8: لإنشاء زاوية قياسها °60.

معطى: الخط w (شكل 13-10).

لإنشاء: زاوية قياسها °60.

الإنشاء: باستخدام طول ملائم كضلع، أنشئ مثلث متساوى الأضلاع باستخدام الإنشاء 7. إذن، أى زاوية من زوايا المثلث المتساوى الأضلاع هى الزاوية المطلوبة.



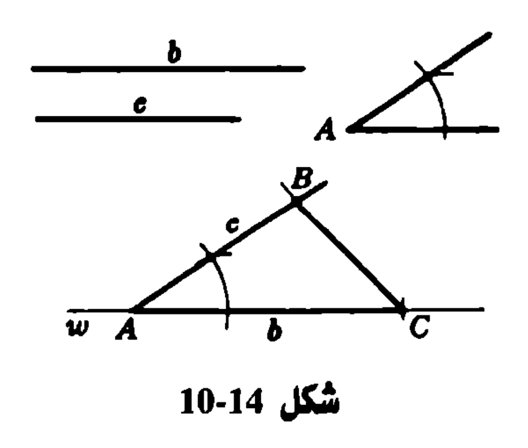
شكل 13-10

إنشاء 9: لإنشاء مثلث معلوم ضلعاه والزاوية المحصورة بينهما.

معطى: $\angle A$، قطعان طولهما b و c (شكل 14-10).

لإنشاء: ΔABC .

الإنشاء: على خط العمل w، أنشئ $\overline{AC}$ بحيث $AC = b$. عند A، أنشئ $\angle A$ بحيث يكون أحد الأضلاع على $\overline{AC}$. على الجانب الآخر من $\angle A$، أنشئ $\overline{AB}$ بحيث $AB = c$، ارسم $\overline{BC}$. إذن، المثلث المطلوب هو ΔABC.



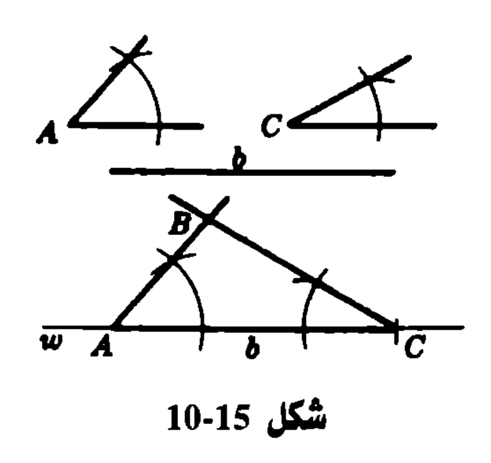
شكل 14-10

إنشاء 10: لإنشاء مثلث بمعلومية زاويتين والضلع المحصور بينهما.

معطى: $\angle A$، $\angle C$، وقطع طوله b (شكل 15-10).

لإنشاء: ΔABC.

الإنشاء: على خط العمل w، أنشئ $\overline{AC}$ بحيث $AC=b$. عند A، أنشئ $\angle A$ بحيث يكون أحد الأضلاع على $\overline{AC}$ وعند C أنشئ $\angle C$ بحيث يكون أحد الأضلاع على $\overline{AC}$. مد الأضلاع الجديدة للزوايا حتى يتقابلوا، عند B.



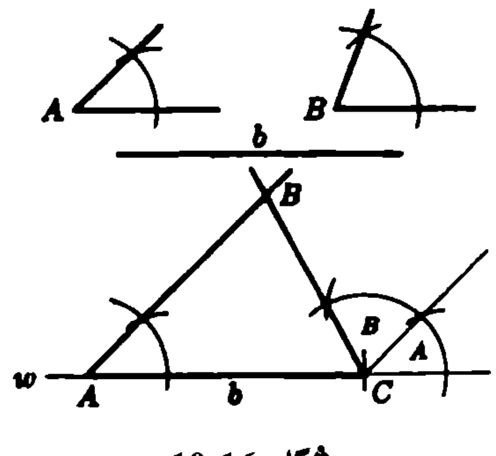
شكل 15-10

إنشاء 11: لإنشاء مثلث بمعلومية زاويتين وضلع غير محصور بينهما.

معطى: $\angle A$، $\angle C$، وقطع طوله b (شكل 16-10).

لإنشاء: ΔABC .

الإنشاء: على خط العمل w، أنشئ $\overline{AC}$ بحيث $b = \overline{AC}$. عند C، أنشئ زاوية قياسها يساوى $m\angle A + m\angle B$ بحيث يكون امتداد $\overline{AC}$ هـو أحد أضلاع الزاوية. المتبقى من الزاوية المستقيمة عند C سيكون $\angle C$. عند A، أنشئ $\angle A$ بحيث يكون أحد الأضلاع على $\overline{AC}$. تقاطع الأضلاع الجديدة للزاوية هى B.



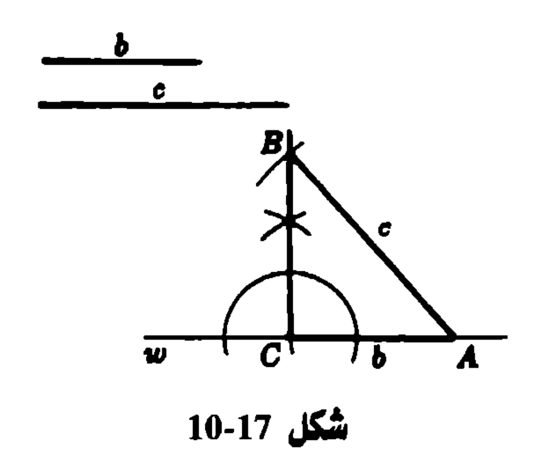
شكل 10-16

إنشاء 12: لإنشاء مثلث قائم بمعلومية وتره وساق.

معطى: وتر طوله c وساق طولها b للمثلث القائم ABC (شكل 10-17).

لإنشاء: المثلث القائم ABC.

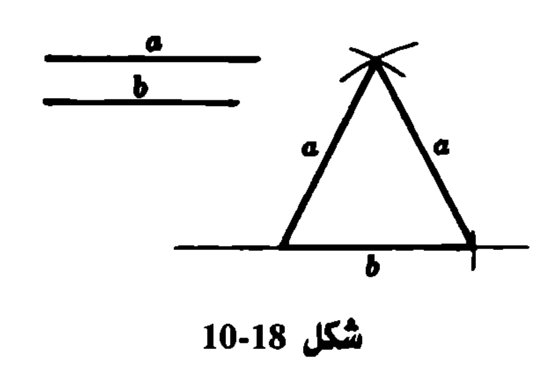
الإنشاء: على خط العمل w، أنشئ $\overline{AC}$ بحيث $AC = b$. عند C، أنشئ عموداً على $\overline{AC}$. باستخدام A كمركز ونصف قطر c، أنشئ قوسًا يقطع العمود عند B.



شكل 10-17

مسألة محلولة 10-5: أنشئ المثلث المتساوى الساقين، بمعلومية أطوال القاعدة وذراع (شكل 10-18).

Solved Problem 10-5: Construct an isosceles triangle, given the lengths of the base and an arm (Fig. 10-18).

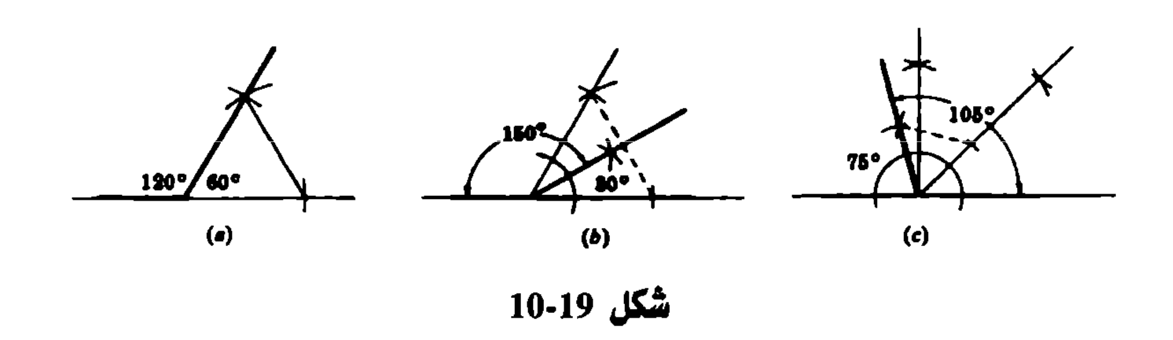


شكل 10-18

الحل: باستخدام الإنشاء 7، حيث أن الثلاثة أضلاع للمثلث معلومة.

مسألة محلولة 10-6: أنشئ زاوية قياسها (a) 120°؛ (b) 35°؛ (c) 150°؛ (d) 105°؛ (e) 75°.

Solved Problem 10-6: Construct an angle of measure (a) 120°; (b) 30°; (c) 150°; (d) 105°; and (e) 75°.



شكل 10-19

الحل:

(a) باستخدام الإنشاء 8 [شكل (a) 10-19] لإنشاء 120° كأنها 180° − 60°.

(b) باستخدام الإنشاء 8 و 3 لإنشاء 30° كأنها $\frac{1}{2}$(60°) [شكل (b) 10-19].

(c) باستخدام (b) لإنشاء 150° كأنها 180° − 30° [شكل (b) 10-19].

(d) باستخدام الإنشاءات 3، 4 و 8 لإنشاء 105° كأنها $\frac{1}{2}$(90°) + 60° [شكل (c) 10-19].

(e) باستخدام (d) لإنشاء 75° كأنها 180° − 105° [شكل (c) 10-19].

Constructing Parallel Lines إنشاء خطوط متوازية

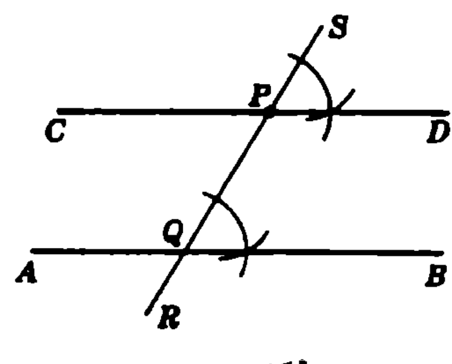
إنشاء 13: لإنشاء خط موازٍ لخط معلوم خلال نقطة خارجية معلومة.

معطى: $\overleftrightarrow{AB}$ ونقطة خارجية P (شكل 10-20).

لإنشاء: خط خلال P يوازى $\overleftrightarrow{AB}$.

الإنشاء: ارسم خط $\overleftrightarrow{RS}$ خلال P يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ فى Q. أنشئ $\angle SPD \cong \angle PQB$.

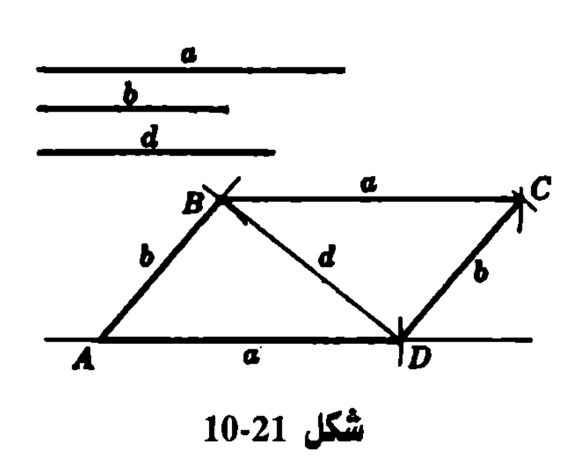
إذن، $\overleftrightarrow{CD}$ هو المتوازى المطلوب. (إذا كانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتين، فإن الخطوط المقطوعة بالخط المستعرض تكون متوازية).



شكل 10-20

مسألة محلولة 10-7: أنشئ متوازى الأضلاع بمعلومية أطوال ضلعين متجاورين a و b وخط قطرى d (شكل 10-21).

Solved Problem 10-7: Construct a parallelogram given the lengths of two adjacent sides a and b and of a diagonal d (Fig. 10-21).



شكل 10-21

الحل:

ثلاثة رؤوس لمتوازى الأضلاع تم الحصول عليها عن طريق إنشاء ΔABD باستخدام الإنشاء 7. الرأس الرابعة C، تم الحصول عليها بإنشاء ΔBCD على الخط القطرى $\overline{BC}$ باستخدام الإنشاء 7. الرأس C يمكن أيضًا الحصول عليها عن طريق إنشاء $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ و $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$.

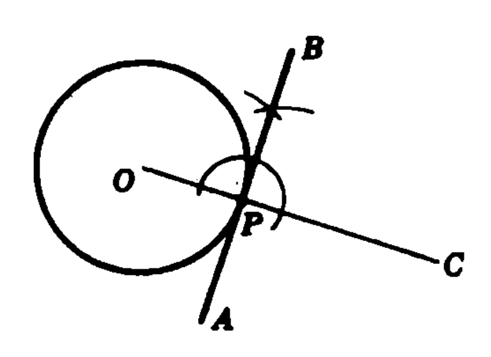
إنشاءات الدائرة Circle Constructions

إنشاء 14: لإنشاء مماس لدائرة معلومة خلال نقطة معلومة على الدائرة .

معطى: الدائرة O والنقطة P على الدائرة (شكل 22-10).

لإنشاء: مماس للدائرة O عند P.

الإنشاء: ارسم نصف القطر $\overline{OP}$ ومده خارج الدائرة. أنشئ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OP}$ عند P. $\overleftrightarrow{AB}$ هو المماس المطلوب. (الخط العمودى على نصف القطر عند طرفه الخارجى هو مماس للدائرة).



شكل 22-10

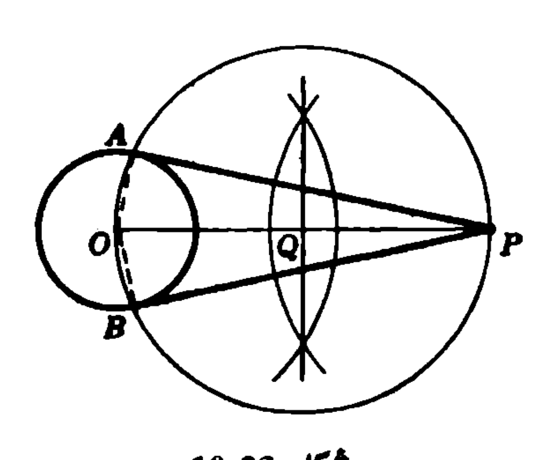
إنشاء 15: لإنشاء مماس لدائرة معلومة خلال نقطة معلومة تقع خارج الدائرة.

معطى: الدائرة O والنقطة P خارج الدائرة (شكل 23-10).

لإنشاء: مماس للدائرة O عند P.

الإنشاء: ارسم $\overline{OP}$، واجعل $\overline{OP}$ قطر لدائرة جديدة Q. وصل P بـ A

و B نقطتا تقاطع الدائرتان O و Q. إذن، $\overline{PA}$ و $\overline{PB}$ مماسات. ($\angle OAP$ و $\angle OBP$ زاويتان قائمتان، بما أن الزوايا المحوطة فى أنصاف الدوائر زوايا قائمة).



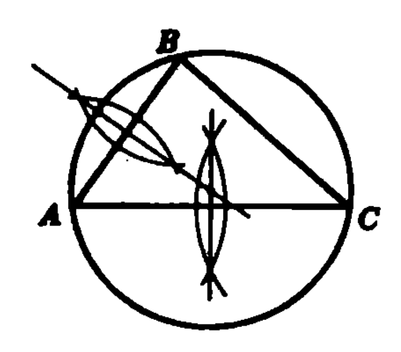
شكل 10-23

إنشاء 16: لإحاطة دائرة حول مثلث من الخارج.

معطى: ΔABC (شكل 10-24).

لإنشاء: الدائرة المحيطة حول ΔABC.

الإنشاء: أنشئ الأعمدة المنصفة لضلعين فى المثلث. تقاطعهما هو مركز الدائرة المطلوبة، والقطر إلى أى رأس هو نصف القطر. (أى نقطة على العمود المنصف لقطع تكون على مسافات متساوية من نهايتى هذا القطع).



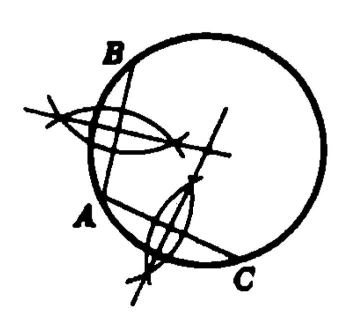
شكل 10-24

إنشاء 17: لتعيين مركز دائرة معلومة.

معطى: دائرة (شكل 25-10).

لإنشاء: مركز الدائرة المعلومة.

الإنشاء: اختار أى ثلاث نقاط A، B، و C على الدائرة. أنشئ الأعمدة المنصفة للقطع المستقيمة $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$. تقاطع هذه الأعمدة المنصفة هو مركز الدائرة.



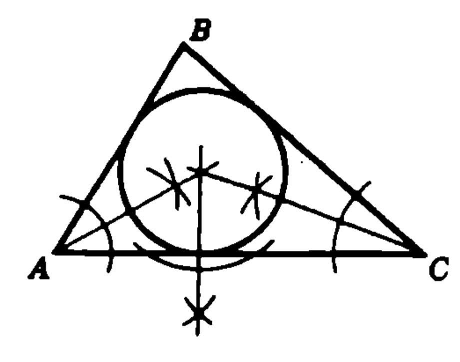
شكل 25-10

إنشاء 18: لإحاطة دائرة حول مثلث معلوم من الداخل.

معطى: ΔABC (شكل 26-10).

إنشاء: الدائرة المحوطة فى ΔABC.

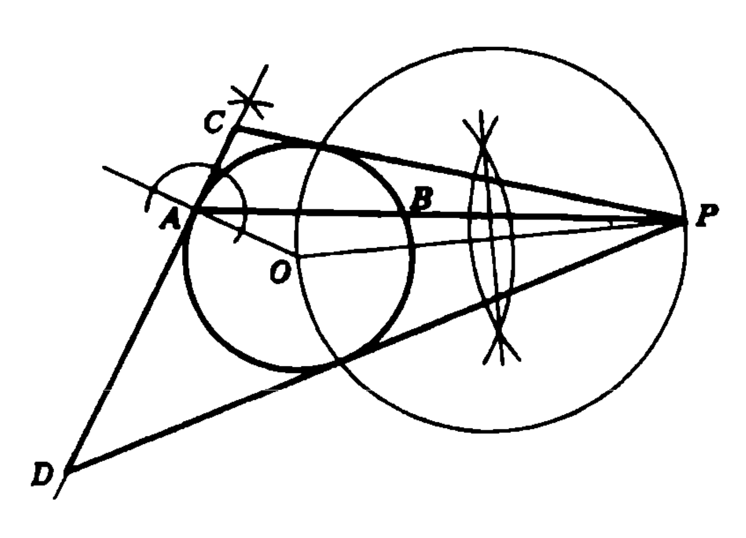
الإنشاء: أنشئ المنصفات لزاويتين فى ΔABC. تقاطعهما هو مركز الدائرة المطلوبة. والمسافة (العمودية) لأى ضلع هى نصف القطر (أى نقطة على منصف الزاوية تكون على مسافات متساوية من أضلاع الزاوية).



شكل 26-10

مسألة محلولة 10-8: القاطع من نقطة P خارج الدائرة O فى الشكل 10-27 يقابل الدائرة فى B و A. أنشئ مثلثًا محيطًا بالدائرة بحيث يكون اثنان من أضلاعه متقابلين فى P والضلع الثالث مماس للدائرة عند A.

Solved Problem 10-8: A secant from a point P outside circle O in Fig. 10-27 meets the circle in B and A. Construct a triangle circumscribed about the circle so that two of its sides meet in P and the third side is tangent to the circle at A.



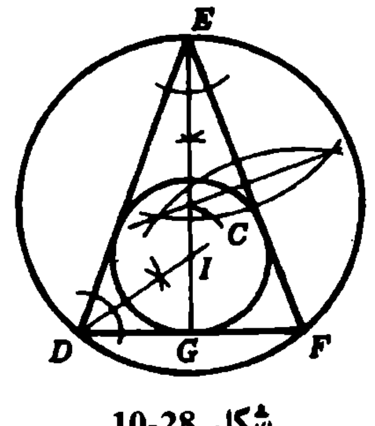
شكل 10-27

الحل:

باستخدام الإنشاءات 14 و15: عند A، أنشئ مماسًا للدائرة O. من P، أنشئ مماسات للدائرة O تقطع المماس الأول فى C و D. المثلث المطلوب هو ΔPCD.

مسألة محلولة 10-9: ارسم الدائرة المحيطة والمحوطة للمثلث المتساوى الأضلاع DEF فى الشكل 10-28.

Solved Problem 10-9: Construct the circumscribed and inscribed circles of isosceles triangle DEF in Fig. 10-28.



شكل 10-28

الحل:

استخدم الإنشاءات 16 و 18. بعمل ذلــك، لاحـظ أن منصـف $\angle E$ هـو أيضًا العمود المنصف للقطع $\overline{DF}$. إذن مركز كل دائرة يقع على $\overline{EG}$. I، مركز الدائــرة المحوطـة وجـد بإنشـاء منصـف $\angle D$ أو $\angle F$. C، مركـز الدائرة المحيطة وجد بإنشاء العمود المنصف للقطع $\overline{DE}$ أو $\overline{EF}$.

الإحاطة الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم

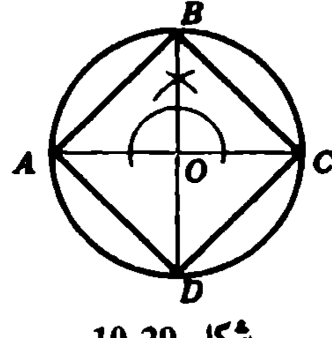
Inscribing and Circumscribing Regular Polygons

إنشاء 19: لإحاطة دائرة حول مربع من الخارج.

معطى: الدائرة O (شكل 10-29).

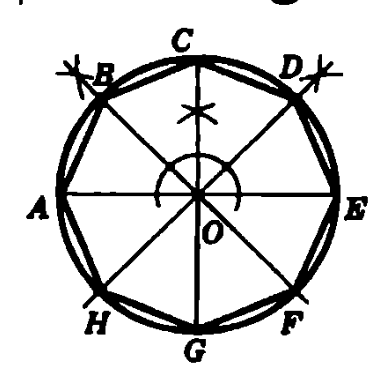
لإنشاء: مربع محاط بالدائرة O.

الإنشاء: ارسم قطرًا، وأنشئ قطرًا آخر عموديًا عليه. وصل بين نهايات الأقطار لتكوين المربع المطلوب.



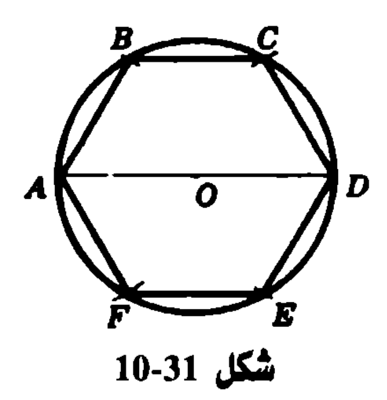
شكل 10-29

إنشاء 20: لإحاطة مثمن منتظم داخل بدائرة معلومة.
معطى: الدائرة O (شكل 10-30).
لإنشاء: مثمن منتظم محاط بالدائرة O.
الإنشاء: كما فى إنشاء 19، أنشئ أقطاراً متعامدة. ثم نصف الزوايا المتكونة من هذه الأقطار، لتقسيم الدائرة إلى ثمان أقواس متطابقة. أوتار هذه الأقواس هى أضلاع المثمن المنتظم المطلوب.



شكل 10-30

إنشاء 21: لإحاطة مسدس منتظم بدائرة معلومة.
معطى: دائرة O (شكل 10-31).
لإنشاء: مسدس منتظم محاط بالدائرة O.
الإنشاء: ارسم القطر $\overline{AD}$ وباستخدام A و D كمراكز، أنشئ أربعة أقواس لها نفس نصف قطر الدائرة O ويقطعون الدائرة. أنشئ المسدس المنتظم المطلوب عن طريق وصل النقاط المتتالية التى تتقاطع فيها الأقواس مع الدائرة.



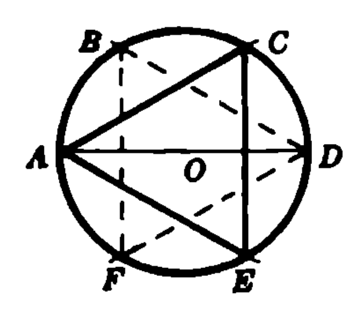
شكل 10-31

إنشاء 22: لإحاطة مثلث متساوى الأضلاع بدائرة معلومة.

معطى: الدائرة O (شكل 32-10).

لإنشاء: مثلث متساوى الأضلاع محاط بدائرة O.

الإنشاء: المثلثات المتساوية الأضلاع المحوطة يمكن الحصول عليها عن طريق وصل نقاط التقسيم الست التى تم الحصول عليها فى الإنشاء 21 بالتبادل.



شكل 32-10

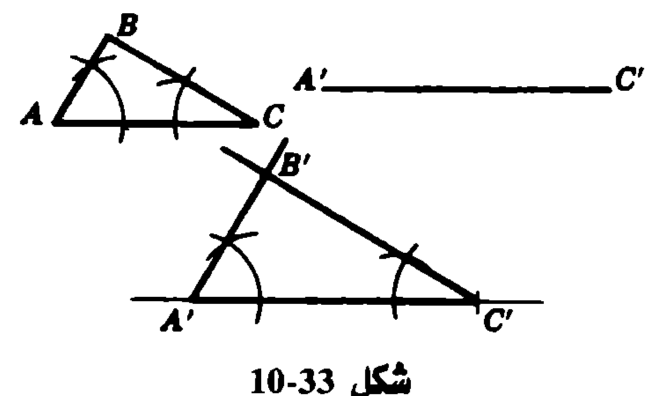
إنشاء مثلثات متماثلة Constructing Similar Triangles

إنشاء 23: لإنشاء مثلث مماثل لمثلث معلوم على قطع مستقيم معلوم كقاعدة.

معطى: ΔABC وقطع مستقيم $A'C'$ (شكل 33-10).

لإنشاء: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ على $\overline{A'C'}$ كقاعدة.

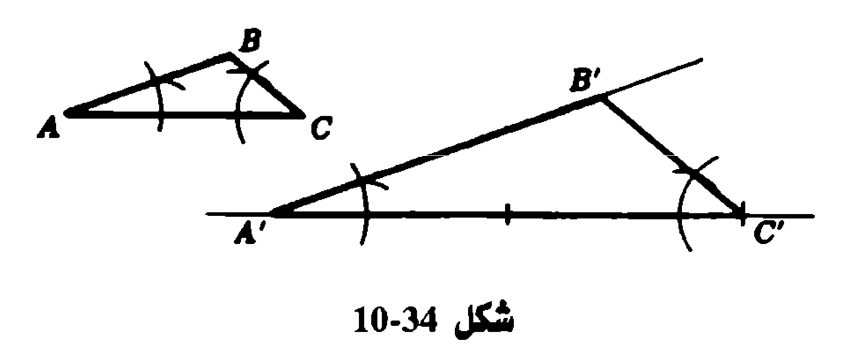
الإنشاء: على $\overline{A'C'}$، أنشئ $\angle A' \cong \angle A$ و $\angle C' \cong \angle C$ باستخدام إنشاء 2. مد الأضلاع الأخرى حتى يتلاقوا، عند B. (إذا كانت زاويتان لمثلث مطابقتين لزاويتين فى مثلث آخر. يكون المثلثان متماثلين).



شكل 10-33

مسألة محلولة 10-10: أنشئ مثلثًا مماثلاً للمثلث *ABC* فى الشكل 10-34، بقاعدة طولها ضعف طول قاعدة المثلث المعلوم.

Solved Problem 10-10: Construct a triangle similar to triangle *ABC* in Fig. 10-34, with a base twice as long as the base of the given triangle.

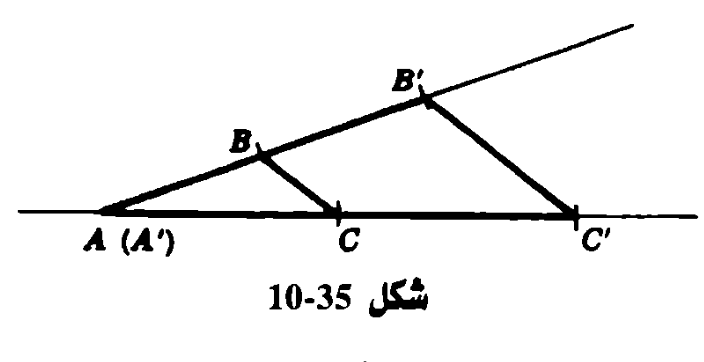


شكل 10-34

الحل:

أنشئ $\overline{A'C'}$ ضعف طول $\overline{AC}$. ثم استخدم إنشاء 23.

وسيلة بديلة (شكل 10-35): مد ضلعى ΔABC لضعف طولهما ووصل بين نقط النهايات.



شكل 10-35

ملحق (A)
صِيَغ للمرجع
Formulas for Reference

Angle Formulas صيغ الزاوية

1. $c = 90° - a°$	1. متمم الزاوية $a°$.
2. $s = 180° - a°$	2. مكمل الزاوية $a°$.
3. $S = 180°$	3. مجموع قياس زوايا المثلث.
4. $S = 360°$	4. مجموع قياس زوايا الشكل الرباعى.
5. $S = 360°$	5. مجموع قياس الزوايا الخارجة للشكل المضلع (n-gon).
6. $S = 180°(n - 2)$	6. مجموع قياس الزوايا الداخلة للشكل المضلع (n-gon).
7. $S = \frac{180°(n-2)}{n}$	7. قياس كل زاوية داخلة للشكل المضلع (n-gon) المتساوى الزوايا أو المنتظم.
8. $S = \frac{360°}{n}$	8. قياس كل زاوية خارجة للشكل المضلع (n-gon) المتساوى الزوايا أو المنتظم.
9. $m\angle 0 = a°$	9. قياس $\angle O$ المركزية المحصورة بقوس من $a°$.
10. $m\angle A = -\frac{1}{2}a°$	10. قياس $\angle A$ المحوطة المحصورة بقوس من $a°$.
11. $m\angle A = -\frac{1}{2}a°$	11. قياس $\angle A$ المتكونة من مماس ووتر ومحصورة بقوس من $a°$.
12. $m\angle A = \frac{1}{2}(a° + b°)$	12. قياس $\angle A$ المتكونة من وترين وقوسين محصورين من $a°$ و $b°$.
13. $m\angle A = \frac{1}{2}(a° + b°)$	13. قياس $\angle A$ المتكونة من مماسين متقاطعين، قاطعين متقاطعين، أو مماس وقاطع متقاطعين وقوسين محصورين من $a°$ و $b°$.

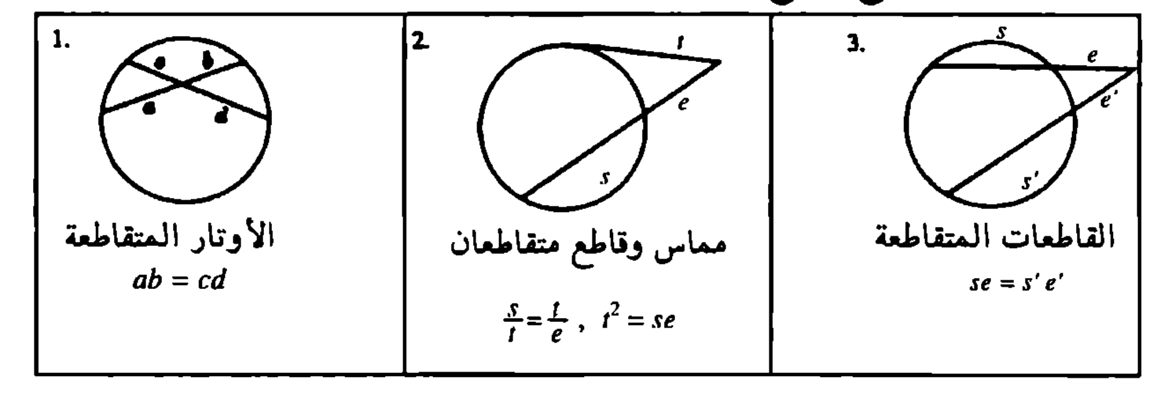
Angle Formulas صيغ الزاوية

14. $m\angle A = 90°$	14. قياس $\angle A$ المحوطة فى نصف دائرة.
15. $m\angle A = 180° - m\angle B$	15. قياس الزوايا $(\angle s)$ A و B لشكل رباعى محوط.

Area Formulas صيغ المساحات

1. $K = bh$		1. مساحة المستطيل
2. $K = s^2$,	$K = \frac{1}{2}d^2$	2. مساحة المربع
3. $K = bh$,	$K = ab \sin C$	3. مساحة متوازى الأضلاع
4. $K = \frac{1}{2}bh$,	$K = \frac{1}{2}ab \sin C$	4. مساحة المثلث
5. $K = \frac{1}{2}h(b + b')$,	$K = hm$	5. مساحة شبه المنحرف
6. $K = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$,	$K = \frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$	6. مساحة المثلث متساوى الأضلاع
7. $K = \frac{1}{2}dd'$		7. مساحة المعين
8. $K = \frac{1}{2}pr$		8. مساحة المضلع المنتظم
9. $K = \pi r^2$,	$K = \frac{1}{4}\pi d^2$	9. مساحة الدائرة
10. $K = \frac{n}{360}(\pi r^2)$		10. مساحة القطاع الدائرى
11. K = area of sector (مساحة القطاع الدائرى) − area of triangle (مساحة المثلث)		11. مساحة القطع الثانوى

Circle Intersection Formulas صيغ تقاطع الدائرة



Right-Triangle Formulas صيغ المثلث القائم

1.	نظرية فيثاغورس	1. $c^2 = a^2 + b^2$
2.	الساق المقابلة للزاوية 30°. الساق المقابلة للزاوية 45°. الساق المقابلة للزاوية 60°.	2. $b = \frac{1}{2}c$ $b = \frac{1}{2}c\sqrt{2},\ b = a$ $a = \frac{1}{2}c\sqrt{3},\ a = b\sqrt{3}$
3.	ارتفاع المثلث المتساوى الأضلاع ضلع المثلث المتساوى الأضلاع	3. $h = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$ $s = \frac{2}{3}h\sqrt{3}$
4.	ضلع المربع. قطر المربع.	4. $s = \frac{1}{2}d\sqrt{2}$ $d = s\sqrt{2}$
5.	الارتفاع إلى الوتر. ساق المثلث القائم.	5. $\frac{p}{h} = \frac{h}{q},\ h^2 = pq,\ h = \sqrt{pq}$ $\frac{c}{a} = \frac{a}{p},\ a^2 = pc,\ a = \sqrt{pc}$ $\frac{c}{b} = \frac{b}{q},\ b^2 = qc,\ b = \sqrt{qc}$

Coordinate-Geometry Formulas صيغ الهندسة الإحداثية

1.	نقطة المنتصف M المسافة P_1P_2 ميل $\overleftrightarrow{P_1P_2}$	1. $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x},\ m = \tan i$
2.	ميل المتوازيين L_1 و L_2 ميل المتعامدين L_1 و L'	2. نفس الميل m $mm' = -1$ $m' = -\frac{1}{m},\ m = -\frac{1}{m'}$
3.	معادلة L_1 ، موازى لمحور x معادلة L_2 ، موازى لمحور y	3. $y = k'$ $x = k$

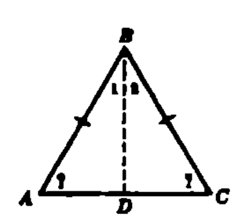
Coordinate-Geometry Formulas صيغ الهندسة الإحداثية

4. $y = mx + b$ $y = mx$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $y - y_1 = m(x - x_1)$	معادلة L_1 بميل m ومحور y يحصر b. معادلة L_2 بميل m ويمر خلال نقطة الأصل. معادلة L_1 ومحور x يحصر a ومحور y يحصر b. معادلة L_3 بميل m وتمر خلال (x_1, y_1).	4.
5. $x^2 + y^2 = r^2$	معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r.	5.

ملحق (B)
براهين لنظريات هامة
Proofs of Important Theorems

النظريات والبراهين المعطاة بأسفل تعتبر الأكثر أهمية فى التسلسل المنطقى للهندسة.

1. إذا كان ضلعان لمثلث متطابقين، الزوايا المقابلة لهذين الضلعين متطابقة. (زوايا القاعدة للمثلث المتساوى الساقين متطابقة).



معطى: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ، ΔABC

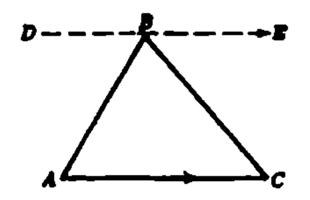
إثبات أن: $\angle A \cong \angle C$.

الخطة: عند رسم منصف زاوية الرأس، الزوايا المطلوب إثبات تطابقها تصبح زوايا متناظرة لمثلثات متطابقة.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{BD}$ منصف $\angle B$	1. من الممكن تنصيف الزاوية.
2. $\angle 1 \cong \angle 2$	2. التنصيف هو التقسيم إلى جزئين متطابقين.
3. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$	3. معطى.
4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	4. خاصية الانعكاس.
5. $\Delta ADB \cong \Delta BDC$	5. s.a.s ≅ s.a.s.
6. $\angle A \cong \angle C$	6. الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة تكون متطابقة.

2. مجموع قياس زوايا المثلث تساوى °180.



معطى: ΔABC

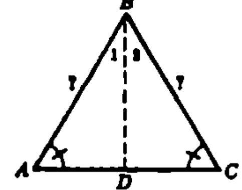
إثبات أن: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

الخطة: عند رسم خط مستقيم خلال رأس من رؤوس المثلث ويكون موازٍ للضلع المقابل، تتكون زاوية مستقيم يمكن إثبات أن أجزاءها مطابقة لزوايا المثلث.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. خلال B، رسم $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{AC}$	1. من خلال نقطة خارجية، يمكن رسم خط موازٍ لخط آخر معطى.
2. $m\angle DBE = 180°$	2. الزاوية المستقيمة هى زاوية قياسها °180.
3. $m\angle DBA + m\angle ABC + m\angle CBE = 180°$	3. الكل يساوى مجموع أجزائه.
4. $\angle A \cong \angle DBA, \angle C \cong \angle CBE$	4. الزوايا المتبادلة الداخلية للخطوط المتوازية متطابقة.
5. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$	5. مبدأ التعويض (التبديل).

3. إذا كانت زاويتان لمثلث متطابقتين، الضلعان المقابلان لهاتين الزاويتين تكونان متطابقتين.



معطى: $\angle A \cong \angle C$، ΔABC

إثبات أن: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

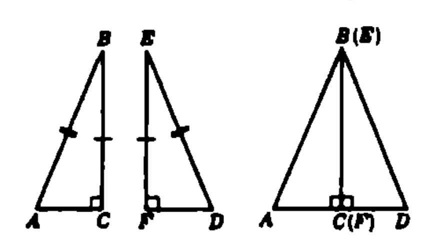
الخطة: عند رسم منصف $\angle B$، الأضلاع المطلوب إثبات تطابقها تصبح أضلاع متناظرة لمثلثات متطابقة.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{BD}$ منصف $\angle B$	1. من الممكن تنصيف الزاوية.

الأسباب	التعبيرات
2. التنصيف هو التقسيم إلى جزئين متطابقين.	2. $\angle 1 \cong \angle 2$
3. معطى.	3. $\angle A \cong \angle C$
4. خاصية الانعكاس.	4. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$
5. s.a.a ≅ s.a.a.	5. $\Delta BDA \cong \Delta BDC$
6. الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة تكون متطابقة.	6. $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

4. يكون المثلثان القائمان متطابقين إذا كان الوتر والساق لأحدهما مطابقين لأجزاؤهم المناظرة في المثلث الآخر.



معطى: مثلث قائم ABC بزاوية قائمة عند C.
مثلث قائم DEF بزاوية قائمة عند F.
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$

إثبات أن: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

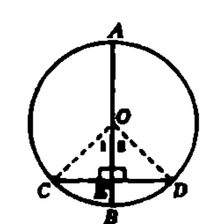
الخطة: حرك المثلثان معًا بحيث $\overline{BC}$ يتطابق على $\overline{EF}$ يتكون مثلث متساوي الساقين. المثلثان المعطيان يمكن إثبات أنهما متطابقان باستخدام النظرية 1. و s.a.a ≅ s.a.a.

البرهان:

الأسباب	التعبيرات
1. معطى.	1. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$
2. الشكل الهندسي يمكن تحريكه بدون تغيير حجمه أو شكله. الخطوط المتساوية يمكن جعلها تتطابق.	2. حرك المثلثين ABC و DEF معًا بحيث $\overline{BC}$ يتطابق على $\overline{EF}$، النقطتان A و D تكونان على جوانب متقابلة من $\overline{BC}$.
3. معطى.	3. $\angle C$ و $\angle F$ زاويتان قائمتان.
4. الكل يساوي مجموع أجزائه.	4. $\angle ACD$ زاوية مستقيمة.
5. أضلاع الزاوية المستقيمة تقع على خط مستقيم.	5. $\overline{AD}$ قطعة مستقيمة.
6. معطى.	6. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$

الأسباب	التعبيرات
7. إذا كان ضلعان لمثلث متطابقين، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين تكونان متطابقتين.	7. $\angle A \cong \angle D$
8. s.a.a ≅ s.a.a.	8. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

5. القطر العمودى على وتر ينصف هذا الوتر وأقواسه.



معطى: الدائرة O، القطر $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

إثبات أن: $\overset{\frown}{CE} \cong \overset{\frown}{ED}$ ، $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{BD}$ ، $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{AD}$

الخطة: تتكون مثلثات متطابقة عند رسم أنصاف أقطار إلى C و D لتثبت أن $\overline{CE} \cong \overline{ED}$. الزوايا المركزية المتساوية تستخدم لإثبات أن $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{BD}$، ثم يستخدم مبدأ الطرح لإثبات أن $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{AD}$.

البرهان:

الأسباب	التعبيرات
1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.	1. ارسم $\overline{OC}$ و $\overline{OD}$
2. أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.	2. $\overline{OC} \cong \overline{OD}$
3. معطى.	3. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$
4. الأعمدة تُكوِّن زوايا قائمة.	4. $\angle OEC$ و $\angle OED$ مثلثان قائمان.
5. خاصية الانعكاس.	5. $\overline{OE} \cong \overline{OE}$
6. ساق.وتر ≅ ساق.وتر (hy.leg ≅ hy.leg)	6. $\Delta OEC \cong \Delta OED$
7. الأجزاء المتناظرة للمثلثات المتطابقة تكون متطابقة.	7. $\angle 1 \cong \angle 2$، $\overline{CE} \cong \overline{ED}$
8. فى الدائرة، الزوايا المركزية المتطابقة لها أقواس متطابقة.	8. $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BD}$
9. القطر ينصف الدائرة.	9. $\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{ADB}$
10. فى الدائرة، الأقواس المتطابقة هى أقواس متساوية؛ مبدأ الطرح.	10. $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$

6. الزاوية المحوطة فى دائرة تقاس بنصف قوسها المحصور.

الحالة I: مركز الدائرة على أحد أضلاع الزاوية.

معطى: $\angle A$ محوطة فى الدائرة O. O على الضلع AC.

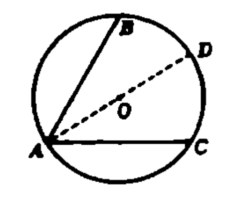
إثبات أن: $\angle A \doteq \frac{1}{2}\ \widehat{BC}$

الخطة: عند رسم نصف القطر $\overline{OB}$، يتكون متساوى الأضلاع ΔAOB. $\angle A$ تثبت أنها تساوى فى قياسها نصف الزاوية المركزية $\angle 1$، والتى تقاس بالقوس $\widehat{BC}$.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{OB}$.	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $\overline{AO} \cong \overline{OB}$	2. أنصاف أقطار الدائرة متطابقة.
3. $\angle A \cong \angle B$	3. إذا كان ضلعان لمثلث متطابقين، فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين تكونان متطابقتين.
4. $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$	4. فى المثلث، قياس الزاوية الخارجة تساوى مجموع قياس الزاويتان الداخليتان تكونا متطابقتين المتجاورتان.
5. $m\angle A + m\angle A = 2m\angle A = m\angle 1$	5. مبدأ التعويض (التبديل).
6. $m\angle A = \frac{1}{2} m\angle 1$	6. أنصاف المتساويات تكون متساوية.
7. $\angle 1 \doteq \widehat{BC}$	7. الزاوية المركزية تقاس بقوسها المحصور.
8. $\angle A \doteq \frac{1}{2}\ \widehat{BC}$	8. مبدأ التعويض (التبديل).

الحالة II: المركز يقع داخل الزاوية.



معطى: $\angle BAC$ محوطة بالدائرة O. O تقع داخل $\angle BAC$.

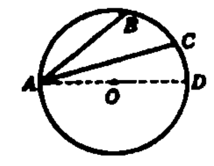
إثبات أن: $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\ \widehat{BC}$

الخطة: عند رسم القطر، $\angle BAC$، تقسَّم إلى زاويتين يمكن قياسهما بتطبيق الحالة I.

البرهان:

الأسباب	التعبيرات
1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.	1. ارسم القطر $\overline{AD}$.
2. الزاوية المحوطة تقاس بنصف قوسها المحصور إذا كان مركز الدائرة على أحد أضلاع الزاوية.	2. $\angle DAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{DC}$ ، $\angle BAD \doteq \widehat{BD}\,\frac{1}{2}$
3. إذا جمعت المتساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.	3. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD} + \frac{1}{2}\widehat{DC}$ أو $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{DC})$
4. مبدأ التعويض (التبديل).	4. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$

الحالة *III*: المركز يقع خارج الزاوية.



معطى: $\angle BAC$ محوطة بالدائرة O. O تقع خارج $\angle BAC$.

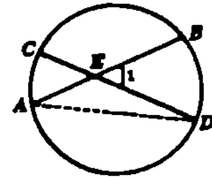
إثبات أن: $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$

الخطة: عند رسم القطر، $\angle BAC$ تصبح فرق زاويتين يمكن قياسهما بتطبيق الحالة *I*.

البرهان:

الأسباب	التعبيرات
1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.	1. ارسم القطر $\overline{AD}$.
2. الزاوية المحوطة تقاس بنصف قوسها المحصور إذا كان مركز الدائرة على أحد الأضلاع.	2. $\angle CAD \doteq \frac{1}{2}\widehat{CD}$ ، $\angle BAD \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$
3. إذا طرحت المتساويات من متساويات، تكون نواتج الطرح متساوية.	3. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD} - \frac{1}{2}\widehat{CD}$ أو $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{CD})$
4. مبدأ التعويض (التبديل).	4. $\angle BAC \doteq \frac{1}{2}\widehat{BC}$

7. الزاوية المتكونة من وترين متقاطعين داخل دائرة تقاس بنصف مجموع الأقواس المحصورة.



معطى: $\angle 1$ تتكون من الوترين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ المتقاطعين فى النقطة E داخل الدائرة O.

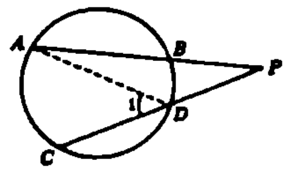
إثبات أن: $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD})$

الخطة: عند رسم الوتر $\overline{AD}$ ، $\angle 1$ تصبح زاوية خارجة للمثلث الذى زاويتاه الداخلتان غير المتجاورتين هما زاويتان محوطتان قياسهما $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ و $\frac{1}{2}\widehat{BD}$.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{AD}$.	1. الخط المستقيم من الممكن رسمه بين نقطتين.
2. $m\angle 1 = m\angle A + m\angle D$.	2. قياس الزاوية الخارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين غير المتجاورتين.
3. $\angle D \doteq \frac{1}{2}\widehat{AC}$ ، $\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$	3. الزاوية المحوطة فى دائرة تقاس بنصف قوسها المحصور.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD} + \frac{1}{2}\widehat{AC}$ أو $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}(\widehat{BD} + \widehat{AC})$	4. مبدأ التعويض (التبديل).

8(a). الزاوية المتكونة من قاطعين متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين أقواسها المحصورة.



معطى: $\angle P$ متكونة من القاطعين $\overline{PBA}$ و $\overline{PDC}$ المتقاطعين فى النقطة P، نقطة خارج الدائرة O.

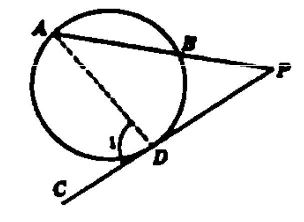
إثبات أن: $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$

الخطة: عند رسم $\overline{AD}$ ، $\angle 1$ تصبح زاوية خارجة لـ ΔADP، بحيث $\angle P$ زاوية داخلة غير متجاورة.

البرهـان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{AD}$	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $m\angle P + m\angle A = m\angle 1$	2. قياس الزاوية الخارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين غير المتجاورتين.
3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle A$	3. مبدأ الطرح.
4. $\angle A \doteq \frac{1}{2}\ \widehat{BD}$ ، $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\ \widehat{AC}$	4. الزاوية المحوطة فى دائرة تقاس بنصف قوسها المحصور.
5. $\angle P \doteq \frac{1}{2}\ \widehat{AC} - \frac{1}{2}\ \widehat{BD}$ أو $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$	5. مبدأ التعويض (التبديل).

8(b). الزاوية المتكونة من قاطع ومماس متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين أقواسها المحصورة.



معطى: $\angle P$ متكونة من القاطع $\overline{PBA}$ والمماس $\overline{PDC}$ المتقاطعين فى P، وهى نقطة خارج الدائرة O.

إثبات أن: $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BD})$

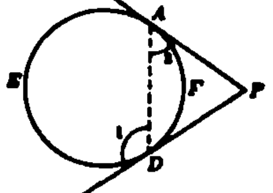
الخطـة: عند رسم الوتر $\overline{AD}$ ، $\angle 1$ تصبح زاوية خارجة للمثلث ΔADP، بحيث $\angle P$ و $\angle A$ زاويتان داخلتان غير متجاورتين.

البرهـان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{AD}$	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. $m\angle P + m\angle A = m\angle 1$	2. قياس الزاوية الخارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين غير المتجاورتين.
3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle A$	3. مبدأ الطرح.
4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\ \widehat{AD}$	4. الزاوية المتكونة من مماس ووتر تقاس بنصف قوسها المحصور.

الأسباب	التعبيرات
5. الزاوية المحوطة تقاس بنصف قوسها المحصور. 6. مبدأ التعويض (التبديل).	5. $\angle A \doteq \frac{1}{2}\widehat{BD}$ 6. $\angle P \doteq \frac{1}{2}\widehat{AD} - \frac{1}{2}\widehat{BD}$ أو $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{BD})$

8(c). الزاوية المتكونة من مماسين متقاطعين خارج الدائرة تقاس بنصف الفرق بين أقواسها المحصورة.



معطى: $\angle P$ متكونة من المماسين $\overline{PA}$ و $\overline{PD}$ المتقاطعين فى P، نقطة خارج الدائرة O.

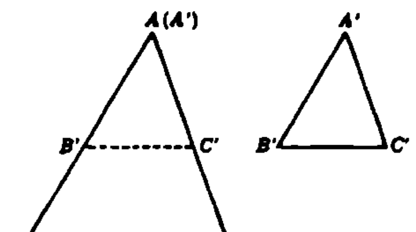
إثبات أن: $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AED} - \widehat{AFD})$

الخطة: عند رسم الوتر $\overline{AD}$ ، $\angle 1$ تصبح زاوية خارجة للمثلث ΔADP، بحيث $\angle P$ و $\angle 2$ زاويتان داخلتان غير متجاورتان.

البرهان:

الأسباب	التعبيرات
1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.	1. ارسم $\overline{AD}$
2. قياس الزاوية الخارجة لمثلث تساوى مجموع قياس الزاويتين الداخلتين غير المتجاورتين.	2. $m\angle P + m\angle 2 = m\angle 1$
3. مبدأ الطرح.	3. $m\angle P = m\angle 1 - m\angle 2$
4. الزاوية المتكونة من مماس ووتر تقاس بنصف قوسها المحصور.	4. $\angle 1 \doteq \frac{1}{2}\widehat{AED}$ ، $\angle 2 \doteq \frac{1}{2}\widehat{AFD}$
5. مبدأ التعويض (التبديل).	5. $\angle P \doteq \frac{1}{2}\widehat{AED} - \frac{1}{2}\widehat{AFD}$ أو $\angle P \doteq \frac{1}{2}(\widehat{AED} - \widehat{AFD})$

9. إذا كانت ثلاث زوايا فى مثلث مطابقة لثلاث زوايا فى مثلث آخر، يكون المثلثان متماثلين.



معطى: ΔABC و $\Delta A'B'C'$ ، $\angle A \cong \angle A'$

$\angle B \cong \angle B'$ ، $\angle C \cong \angle C'$

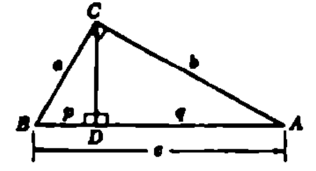
إثبات أن: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

الخطة: لإثبات أن المثلثين متماثلان، يجب توضيح أن الأضلاع المتناظرة متناسبة. ويتم عمل ذلك عن طريق وضع المثلثين بحيث يتوافق زوج من الزوايا المتطابقة فوق بعضهما البعض، ثم يتم إعادة ذلك ليتوافق زوج آخر من الزوايا المتطابقة.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. $\angle A \cong \angle A'$	1. معطى.
2. ضع $\Delta A'B'C'$ على ΔABC بحيث $\angle A'$ تتطابق على $\angle A$.	2. الشكل الهندسى يمكن تحريكه بحيث لا يتغير حجمه أو شكله. الزوايا المتساوية يمكن جعلها تتطابق فوق بعضها البعض.
3. $\angle B \cong \angle B'$	3. معطى.
4. $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$	4. يكون الخطان متوازيين إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة.
5. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$	5. الخط الموازى لضلع فى المثلث يُقَسِّم الضلعين الآخرين بالتناسب.
6. بنفس الطريقة، ضع $\Delta A'B'C'$ على ΔABC بحيث $\angle B'$ تتطابق على $\angle B$، وضح أن $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$	6. الأسباب من 1 إلى 5.
7. $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$	7. الأشياء (النسب) التى تساوى نفس الشىء تكون مساوية لبعضها البعض.
8. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$	8. المضلعان متماثلان إذا كانت زواياهم المتناظرة متطابقة وأضلاعهم المتناظرة متناسبة.

10. إذا رُسِم الارتفاع إلى وتر المثلث القائم، إذن (a) المثلثان المتكونان متماثلين مع المثلث المعطى ولبعضهما البعض. و (b) كل ساق للمثلث المعطى هى التناسب الوسط بين الوتر وإسقاط هذه الساق على الوتر.



معطى: ΔABC بزاوية قائمة عند C.
الارتفاع $\overline{CD}$ إلى الوتر $\overline{AB}$.

إثبات أن: (a) $\Delta ADC \sim \Delta BDC \sim \Delta ABC$

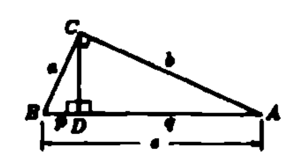
(b) $c : b = b : q$ ، $c : a = a : p$

الخطة: المثلثان متماثلين حيث أنهما بهما زاوية قائمة وزوج من الزوايا الحادة المتطابقة. التناسب يتبع من المثلثات المتماثلة.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. $\angle C$ زاوية قائمة	1. معطى.
2. $\overline{CD}$ هو الارتفاع إلى $\overline{AB}$	2. معطى.
3. $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	3. الارتفاع إلى ضلع فى المثلث يكون عمودى على هذا الضلع.
4. $\angle CDB$ و $\angle CDA$ هما زاويتان قائمتان.	4. أعمدة من زوايا قائمة.
5. $\angle B \cong \angle B$ ، $\angle A \cong \angle A$	5. خاصية الانعكاس.
6. $\Delta ADC \sim \Delta ABC$ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$	6. المثلثان القائمان يكونان متطابقين إذا كانت الزاوية الحادة لأحدهما تطابق الزاوية الحادة للآخر.
7. $\Delta ADC \sim \Delta BDC$	7. المثلثات المتماثلة مع نفس المثلث تكون متماثلة مع بعضها البعض.
8. $c : b = b : q$ ، $c : a = a : p$	8. الأضلاع المتناظرة للمثلثات المتماثلة تكون متناسبة.

11. مربع طول الوتر فى المثلث القائم يساوى مجموع مربعات أطوال الضلعين الآخرين.



معطى: المثلث القائم ΔABC، بزاوية قائمة عند C.
الساقان لهما طول a و b والوتر طوله c.

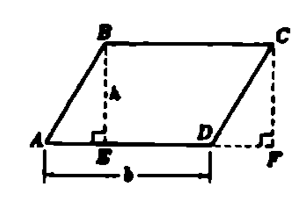
إثبات أن: $c^2 = a^2 + b^2$

الخطة: رسم $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ وتطبيق النظرية 10.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	1. خلال نقطة خارجة، يمكن رسم خط عمودى على خط معطى.
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{p}$ ، $\frac{c}{b} = \frac{b}{q}$	2. إذا رُسم الارتفاع إلى الوتر فى المثلث القائم، أى من الساقين تكون التناسب الوسط بين الوتر وإسقاط هذه الساق على الوتر.
3. $a^2 = cp$ ،$b^2 = cq$	3. فى التناسب، حاصل ضرب الأوساط يساوى حاصل ضرب الأطراف.
4. $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q)$	4. إذا جمعت المتساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.
5. $c = p + q$	5. الكل يساوى مجموع أجزائه.
6. $a^2 + b^2 = c(c) = c^2$	6. مبدأ التعويض (التبديل).

12. مساحة متوازى الأضلاع تساوى حاصل ضرب طول أحد الأضلاع فى طول الارتفاع إلى هذا الضلع.



معطى: $\square ABCD$، طول القاعدة: $b = \overline{AD}$،
طول الارتفاع: $h = \overline{BE}$.

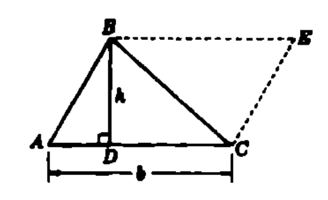
إثبات أن: مساحة $ABCD = bh$

الخطة: عند إسقاط عمود على القاعدة ومد هذه القاعدة، يتكون مستطيل له نفس القاعدة والارتفاع مثل متوازى الأضلاع. عن طريق جمع المثلثات المتطابقة على مساحة مشتركة، يثبت أن المستطيل ومتوازى الأضلاع متساويان فى المساحة.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{CF} \perp \overrightarrow{AD}$ (مد القاعدة)	1. خلال نقطة خارجة، يمكن رسم خط عمودى على خط معطى.
2. $\overline{CF} \parallel \overline{BE}$	2. القطع العمودية على نفس الخط تكون متوازية.
3. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	3. الأضلاع المتقابلة لمتوازى الأضلاع متوازية.
4. $\angle CFD$ و $\angle BEA$ زوايا قائمة.	4. الأعمدة تُكّون زوايا قائمة.
5. $BCFE$ مستطيل.	5. متوازى الأضلاع الذى يحوى زاوية قائمة هو مستطيل.
6. $\overline{CF} \cong \overline{BE}$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	6. الأضلاع المتقابلة لمتوازى الأضلاع متساوية.
7. $\Delta ABE \cong \Delta CFD$	7. وتر.ساق ≅ وتر ساق (hy.leg ≅ hy.leg).
8. مساحة (الشكل الرباعى $BCDE$) = مساحة (الشكل الرباعى $BCDE$)	8. خاصية الانعكاس.
9. مساحة ΔABE + مساحة (الشكل الرباعى $BCDE$) = مساحة (ΔCFD) + مساحة (الشكل الرباعى $BCDE$) أو مساحة (المستطيل $BCFE$) = مساحة ($\square ABCD$)	9. إذا جمعت المتساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.
10. مساحة المستطيل $BCFE = bh$	10. مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب أطوال قاعدته وارتفاعه.
11. مساحة $\square ABCD = bh$	11. مبدأ التعويض (التبديل).

13. مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب طول أحد الأضلاع فى طول الارتفاع إلى هذا الضلع.



معطى: ΔABC، طول القاعدة: $b = \overline{AC}$
طول الارتفاع: $h = \overline{BD}$.

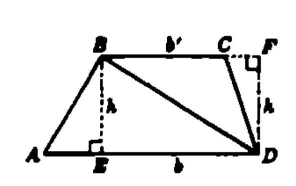
إثبات أن: مساحة $\Delta ABC = \frac{1}{2} bh$

الخطة: برسم $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$ و $\overline{EC} \parallel \overline{AB}$ يُكوّن متوازى أضلاع له نفس قاعدة وارتفاع المثلث . إذن مساحة المثلث هى نصف مساحة متوازى الأضلاع.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$ و $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$	1. خلال نقطة خارجة، يمكن رسم خط موازٍ لخط معطى.
2. $ABEC$ متوازى أضلاع قاعدتــه b وارتفاع h.	2. الشكل الرباعى يكون متوازى أضلاع إذا كانت أضلاعه المتقابلة متوازية.
3. مســاحة (ΔABC) = $\frac{1}{2}$ مســاحة $(\square ABEC)$	3. الخط القطرى يقسم متوازى الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.
4. مساحة $(\square ABEC)$ = bh	4. مساحة متوازى الأضلاع تســاوى حــاصل ضرب أطوال قاعدته وارتفاعه.
5. مساحة (ΔABC) = $\frac{1}{2} bh$	5. مبدأ التعويض (التبديل).

14. مساحة شبه المنحرف تساوى نصف حاصل ضرب طـول الارتفـاع فـى مجموع أطوال قاعدتيه.



معطى: شبه المنحرف $ABCD$، الارتفاع $\overline{BE}$ طوله h، القاعدة $\overline{AD}$ طولها b، القاعدة $\overline{BC}$ طولها b'

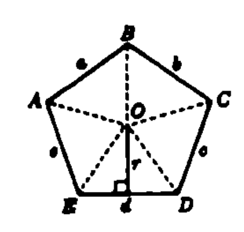
إثبات أن: مساحة $ABCD = \frac{1}{2} h(b + b')$

الخطة: عند رسم الخط القطرى، يُقسم شبه المنحرف إلى مثلثين لهما ارتفاع مشترك h وقاعدتان b و b'.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{BD}$	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.
2. ارسم $\overline{DF} \perp \overrightarrow{BC}$ (مد القاعدة)	2. خلال نقطة خارجة، يمكن رسم خط عمودى على خط معطى.
3. $DF = BE = h$	3. الخطوط المتوازية تكون على بُعدٍ متساوٍ.
4. مساحة $(\Delta ABD) = \frac{1}{2}bh$ مساحة $(\Delta BCD) = \frac{1}{2}b'h$	4. مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب أطوال قاعدته وارتفاعه.
5. مساحة $ABCD = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}b'h$ $= \frac{1}{2}h(b+b')$	5. إذا جمعت متساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.

15. مساحة المضلع المنتظم تساوى نصف حاصل ضرب محيطه فى نصف قطر الدائرة المحوطة للمضلع المنتظم.



معطى: المضلع المنتظم ... $ABCDE$ له مركز O.

نصف قطر الدائرة المحوطة r، محيط P.

إثبات أن: مساحة $ABCDE = \frac{1}{2}rp$

الخطة: عن طريق ربط كل رأس بالمركز، نحصل على مثلثات متطابقة، مجموع مساحتها تساوى مساحة المضلع المنتظم.

البرهان:

التعبيرات	الأسباب
1. ارسم $\overline{OA}$ ، $\overline{OB}$ ، $\overline{OC}$ ، $\overline{OD}$ ، $\overline{OE}$ ،	1. من الممكن رسم خط مستقيم بين نقطتين.

الأسباب	التعبيرات
2. أنصاف أقطار الدائرة المحوطة للمضلع المنتظم متطابقة.	2. r هو ارتفاع كل مثلث مُتكوِّن.
3. مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه.	3. مساحة $\Delta AOB = \frac{1}{2} ar$ $\Delta BOC = \frac{1}{2} br$ $\Delta COD = \frac{1}{2} cr$
4. إذا جمعت المتساويات على متساويات، تكون نواتج الجمع متساوية.	4. مساحة المضلع المنتظم $ABCDE..$ $= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr + \ldots.$ $= \frac{1}{2} r\ (a + b + c + \ldots.)$
5. الكل يساوى مجموع أجزائه.	5. $p = a + b + c\ \ldots$
6. مبدأ التعويض (التبديل).	6. مساحة $ABCDE\ldots = \frac{1}{2} rp$

قائمة المصطلحات العلمية (إنجليزى/عربى)

(A)	
Acute angles	زوايا حادة
Acute triangles	مثلثات حادة
Adjacent angles	زوايا متجاورة
Alternate interior angles	زوايا داخلة متبادلة
Altitude of triangles	ارتفاع المثلث
Angle of bisector	منصف الزاوية
Angles	زوايا
Arc	قوس
Areas	مساحات
Assumptions	افتراضات
Axioms	حقائق مقررة
(B)	
Bisectors	منصفات
(C)	
Central angle	زاوية مركزية
Chords	أوتار
Circles	دوائر
Circumference	محيط
Circumscribed circle	دائرة محيطة
Circumscribed polygon	مضلع محيط
Complementary angles	زوايا متتامة
Concentric circles	دوائر متحدة المركز
Conclusion (deductive)	استنتاج (استدلال)
Congruency	تطابق
Congruent angle	زاوية متطابقة
Congruent figures	أشكال متطابقة
Congruent triangles	مثلثات متطابقة
Constructions	انشاءات
Converse of a statement	مقلوب التعبير
Corresponding angles	زوايا متناظرة
(D)	
Deductive reasoning	تفكير استدلالى
Defined terms	مصطلحات معرفة
Diameter	قطر
Distances	مسافات
(E)	
Equilateral triangles	مثلثات متساوية الأضلاع
(F)	
Formulas	صيَغ
angle	زاوية
area	مساحة
circle intersection	تقاطع دائرة
coordinate	إحداثيات
right triangle	مثلث قائم
(H)	
Hypothesis	فرضية
(I)	
If-then form	أسلوب إذا ـ إذن

Inscribed angle زاوية محوطة
Inscribed circle دائرة محوطة
Inscribed polygon مضلع محوط
Isosceles trapezoids
أشباه منحرف متساوية الساقين
Isosceles triangles
مثلثات متساوية الساقين

(L)

Line segments قطعة مستقيمة
Lines خطوط

(M)

Major arc قوس رئيسى
Major premise مقدمة كبرى
Measuring angles قياس الزوايا
Median of a triangle
المستقيم المتوسط للمثلث
Minor arc قوس ثانوى
Minor premise مقدمة صغرى

(O)

Obtuse angle زاوية منفرجة
Obtuse triangle مثلث منفرج

(P)

Parallel lines خطوط متوازية
Parallelograms متوازيات أضلاع
Pentagons أشكال خماسية
Perpendicular bisector عمود منصف
Perpendiculars أعمدة
Planes مستويات

Principles قواعد
angle-measurement-sum
مجموع - قياس - زاوية
angle-measurement قياس - زاوية
circle دائرة
congruency تطابق
congruent triangles مثلثات متطابقة
distances مسافات
isosceles and equilateral triangles
مثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع
mean proportional in rt. triangle
المتناسب الوسط فى المثلث القائم
pairs of angles أزواج الزوايا
parallel lines خطوط متوازية
parallelograms متوازيات أضلاع
polygon angles زوايا مضلع
polygons مضلعات
proportion متناسب
proportional segments قطع متناسبة
regular polygons مضلعات منتظمة
similar triangles مثلثات متماثلة
special parallelograms
متوازيات أضلاع خاصة
special rt. triangles
مثلثات قائمة خاصة
tangents مماسات
Proof by deductive reasoning
البرهان بالتفكير الاستدلالى

Proofs براهين
Proportional segments قطع متناسبة
Proportions متناسبات
Proving theorems إثبات النظريات
Point نقطة
Polygons مضلعات
Postulates مبادئ أساسية
Pythagorean theorem نظرية فيثاغورس

(R)

Radius نصف قطر
Ratios نسب
Rectangle مستطيل
Reflex angle زاوية انعكاس
Regular polygons مضلعات منتظمة
Rhombus معين
Right angle زاوية قائمة
Right triangles مثلثات قائمة

(S)

Scalene triangle
مثلث غير متساوى الأضلاع
Secant قاطع
Segments قطعة
Semicircle نصف دائرة
Similar triangles مثلثات متماثلة
Similarity تماثل
Special parallelograms
متوازيات أضلاع خاصة
Special right triangles
مثلثات قائمة خاصة
Squares مربعات
Straight angle زاوية مستقيمة
Subject-predicate form
أسلوب المسند إليه ـ المسند
Supplementary angles الزوايا المتكاملة
Syllogistic reasoning تفكير قياسى

(T)

Tangent مماس
Theorems نظريات
Trapezoids أشباه منحرف
Triangles مثلثات

(U)

Undefined terms مصطلحات غير معرفة

(V)

Vertex رأس
Vertical angles زوايا متقابلة بالرأس

Study Guides/Mathematics

When you don't have the time... but you still need the grade!

If your life is too busy to spend hours ploughing through weighty textbooks, and you need every study minute to count, *Schaum's Easy Outline* is perfect for you! This super-condensed, high-torque study guide gives you what you need toknow in a fraction of the time.

SUPER-IMPACT

Built for quick, effective study, this *Easy Outline* packs exciting new learning tools that make mastering geometry fast, fun—and almost automatic.

SPEEDY

Quick-study experts slashed the time you need to spend with your books by reducing geometry to the essentials the professor expects you to know. This *Easy Outline* is perfect for test preparation, pre-exam review, and handling those last-minute cram situations.

HI-QUALITY

Easy Outlines give you 100% of the authority of Schaum's full-sized guides, known around the world for the highest academic standards.

BACKPACK-ABLE STUDY POWER

Compact and portable, this *Easy Outline* lets you study geometry anywhere.

SCHAUM'S GETS THE GRADE!

Let's talk bottom line. *Schaum's Easy Outlines* give you what you want—better grades, with less work, and more free time!

Get the essence of geometry the easy way. *Schaum's Easy Outline of Geometry* helps you master geometry with plenty of illustrations, memory joggers, and the newest, rapid-absorption teaching techniques. Backed by Schaum's reputation for academic authority, this is the study guide students turn to and trust. Students know that Schaum's is going to be there for them when they need it!

- Quick study tips
- Student-friendly style
- At-a-glance tables
- Perfect for test prep



The McGraw-Hill Companies

Visit us at: www.books.mcgraw-hill.com



ISBN 977-282-160-5

Arabic version by:

